

KÖRNYEZETISMERET ÉS GEOMETRIA

Debreceni Egyetem Műszaki Kar,
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Vámosiné dr Varga Adrienn



DEBRECENI
EGYETEM

Azokat a felületek, melyeket alkalmas Descartes-féle koordináta-rendszerben másodfokú egyenlettel adhatunk meg, másodrendű felületeknek nevezzük.

Általános egyenletük:

★ $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$

ahol a_{ij}-k valós számokat jelölnek és a másodfokú tagok együtthatói közül legalább egy nem nulla. Azon (x,y,z) pontok a térben, melyek koordinátái eleget tesznek a fenti egyenletnek felületet határoznak meg a térben.

Egy másodrendű felületet az említett egyenlet alakjától függően az alábbi osztályokba sorolhatunk:

- ellipszoidok, ebbe az osztályba tartoznak például a gömbök is;
- egyköpenyű, kétköpenyű hiperboloidok;
- hiperbolikus, elliptikus paraboloidok;
- kúpfelületek;
- hengerfelületek

A ★ egyenletben szereplő együtthatókat egy szimmetrikus mátrixba rendezhetjük a következőképp:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

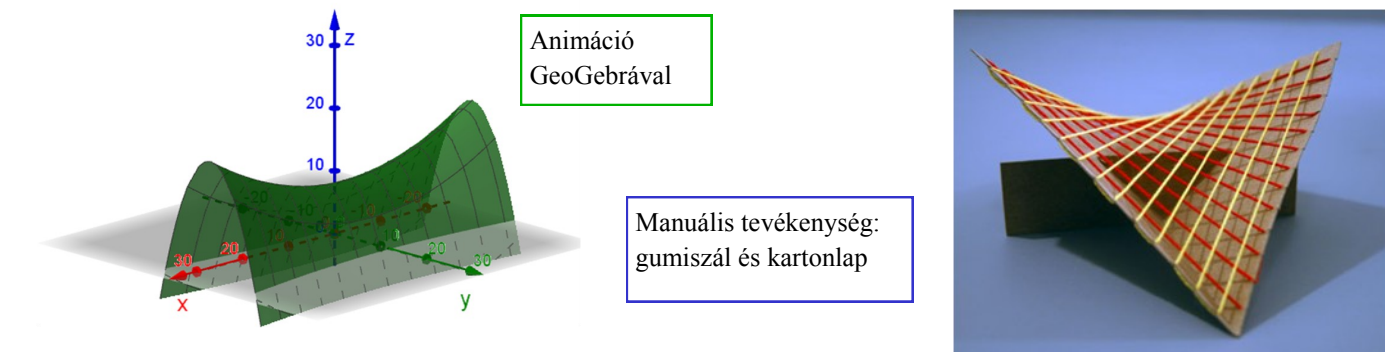
ahol a_{ij}=a_{ji} (i,j=1, 2, 3, 4 és i≠j). Bevezetve a felület egy pontjára az (x,y,z) jelölést, majd az (x,y,z,1)=:k jelölést, a másodrendű felület egyenlete ekkor mátrixos alakban: $\underline{k} \underline{M} \underline{k}^T = 0$



Parabola és Nyeregfelület

A parabola azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík egy adott v egyenesétől (vezéregyenes) és egy v-re nem illeszkedő F pontjától (fókuszpont) vett távolsága egyenlő.

Legyen adott egy **a** alapgörbe és annak egy **P** pontjának mozgása során leírt **p** pályagörbe. Ha az **a** alapgörbét végigtoljuk a **p** pályagörbén úgy, hogy a **P** pont mindig illeszkedjen a **p** pályagörbére, akkor eltolási felületet kapunk. Ha két merőleges síkú, ellentétes tengelyirányú parabolát tekintünk alapgörbéknek, akkor egy nyeregfelületet (hiperbolikus paraboloidot) kapunk.



Animáció
GeoGebrával

Manuális tevékenység:
gumiszal és kartonlap

Példa

A hiperbolikus paraboloid felület síkba nem teríthető, de egyenes alkotókkal leírható felület. A vasbeton-építészetben közkedvelt, hiszen egyenes deszkákkal lehet zsaluezni.



Mivel leginkább nyereg formában szokták használni, nyeregfelületnek is nevezzük.

Ellipszis és Ellipszoid

Az **ellipszis** azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík két adott pontjától (fókuszpontok) vett távolságösszege a két adott pont távolságánál nagyobb állandó. Az ellipszis fókuszpontjain áthaladó húrja az ellipszis nagytengelye. A fókuszok által meghatározott szakasz felezőpontján a nagytengelyre merőlegesen állított egyenes által meghatározott húr a kistengely. Ha egy ellipszist nagytengelye körül megforgatunk orsószfteroidot, ha kistengelye körül megforgatunk lencseszfteroidot kapunk.

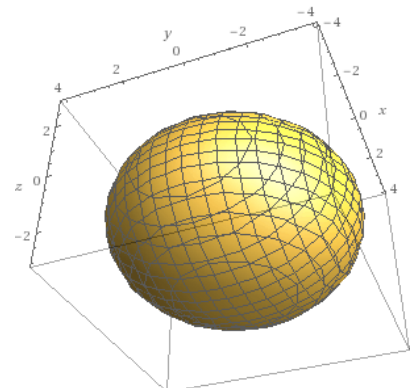
A **WolframAlpha** alkalmazásával:

$$\{x,y,z,1\}*\{\{1/4^2,0,0,0\},\{0,1/4^2,0,0\},\{0,0,1/3^2,0\},\{0,0,0,-1\}\}*\{x,y,z,1\}=0$$

Input:

$$(x \ y \ z \ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot (x \ y \ z \ 1)$$

Result: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$



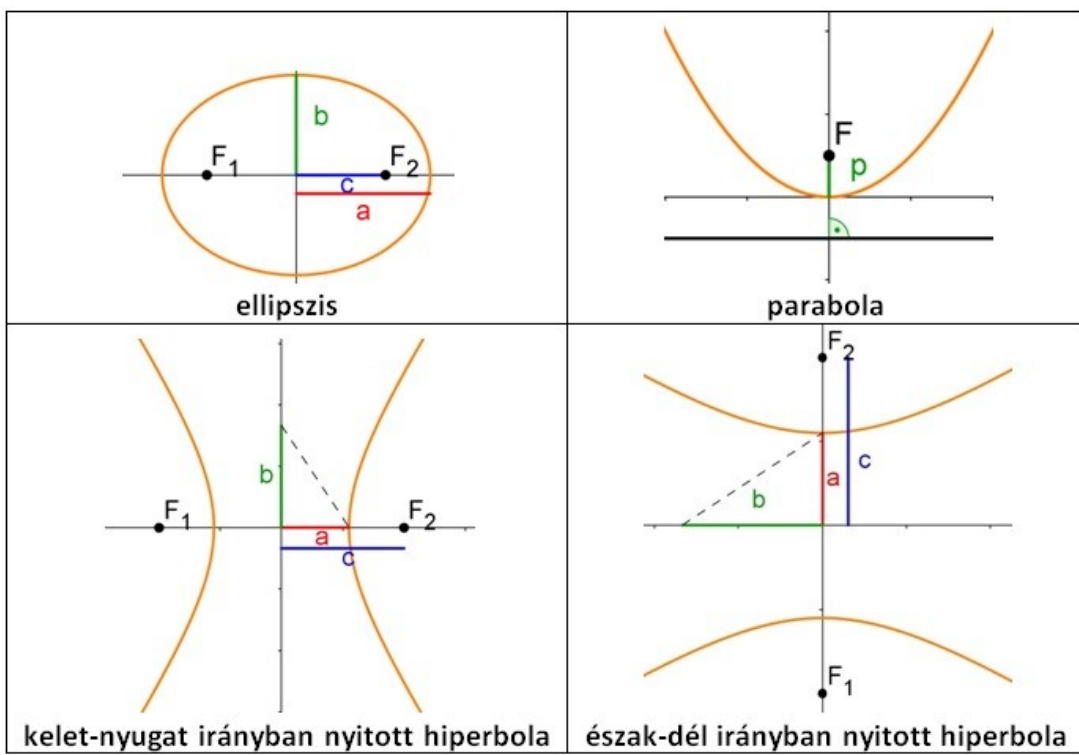
Surface plot:

A műszaki pályák mindegyike magas szintű térlátást, a térbeli viszonyok precíz felismerését várja el művelőjétől.

Az EFOP–3.6.1–16–2016–00022 „Debrecen Venture Catapult Program” keretén belül készségfejlesztő foglalkozás kerül kidolgozásra, mely a térgeometria témakörön belül a nevezetes felületek geometriája ismeretanyagának elsajátítását célozza meg manuális tevékenységekkel.

Kezdetben, az alapfokú oktatásban alapvető fontosságú, hogy a matematikai fogalmak megalapozása tapasztalatszerzés útján történjen. A másodrendű felületek témaköre jól kapcsolható mindennapi élményeinkhez, hiszen ezekkel a felületekkel, mint például szerszámfelületekkel, épületek tetőszerkezetével környezetükben nap mint nap találkozunk.

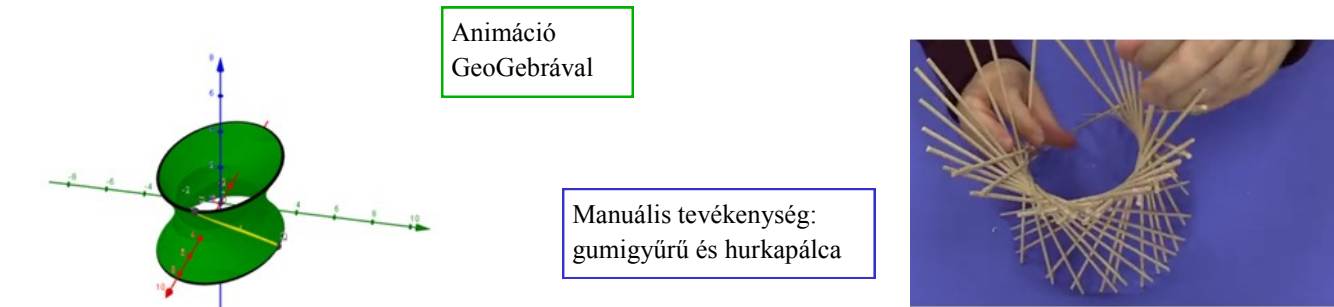
A főként középiskolások számára tervezett foglalkozásokon ilyen felületeket tanulmányozunk, a térszemlélet fejlesztéséhez animációkat is használunk. Manuális tevékenységek között a felületek algebrai megadásával is megismerkedünk. A felületek alakját befolyásoló algebrai paramétereket szabad felhasználású matematikai szoftver segítségével tanulmányozzuk.



Az ellipszoid egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Az egyköpenyű hiperboloid egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Ha c=b, akkor orsószfteroidot kapunk Ha c=a, akkor lencseszfteroidot kapunk	Ha itt a=b, akkor forgási hiperboloidot kapunk

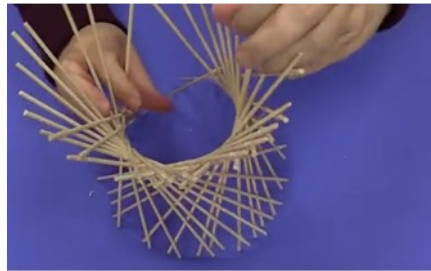
Hiperbola és Egyköpenyű hiperboloid

A hiperbola azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík két adott pontjától (fókuszpontok) vett távolságkülönbsége abszolút értékben a két adott pont távolságánál kisebb pozitív állandó. Egyköpenyű forgási hiperboloidot kapunk, ha a hiperbolát képzetes tengelye (kistengelye) körül megforgatjuk. Egyköpenyű hiperboloidot kapunk akkor is, ha két kitérő egyenes közül az egyiket megforgatjuk a másik körül.



Animáció
GeoGebrával

Manuális tevékenység:
gumigyűrű és hurkapálca



Példa

Kitérő tengelyvonalúfogaskerek hajtásoknál a kerek elméleti „gördülőfelületei” egyenes alkotójú, egyköpenyű forgáshiperboloidok. A hipoid kerékpár fogaskerekeinek viszonylagos mozgása ugyanúgy csavarmozgás, mint a csavarkerékpár esetében. A csavartengelyt a kerek forgástengelyei körül megforgatva egyköpenyű forgási hiperboloidokat kapunk. Az idézőjel azért indokolt, mert ezek a felületek nem tisztán gördülnek, hanem csúsznak is egymáson. A hipoid elnevezés a gördülőfelületekre, a hiperboloidokra utal. A gyakorlatban a forgási hiperboloidot kúpfelülettel közelítjük. Például az autók váltójában találkozhatunk ilyen fogaskerekkel.



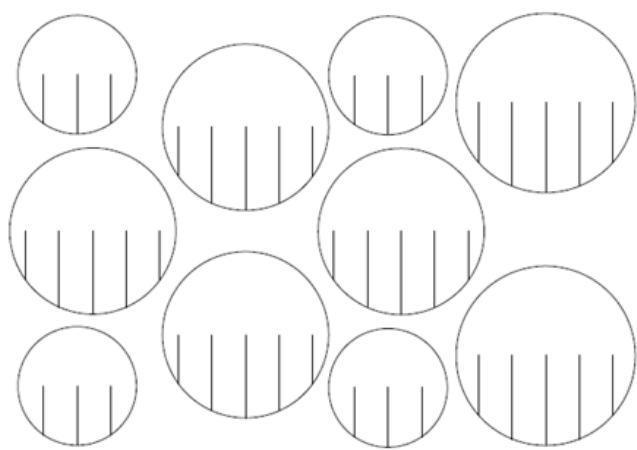
	A görbe egyenlete:	
ellipszis	Ha a fókuszok F1=(-c,0) és F2=(c,0), akkor $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2 - b^2$
parabola	Ha a fókusz F=(0,p) és y=-p a vezéregyenes, akkor $y = \frac{1}{4p} \cdot x^2$	
K-Ny hiperbola	Ha F1=(-c,0) és F2=(c,0), akkor $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2 + b^2$
É-D hiperbola	Ha F1=(0,-c) és F2=(0,c), akkor $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	$c^2 = a^2 + b^2$

Kör és Gömb

A **kör** vagy körvonal a sík azon pontjainak halmaza, melyek a sík egy meghatározott pontjától (középpont) adott távolságra (sugár) vannak. A szelő olyan egyenes, amely két pontban metszi a körvonalat (például M és L). A húr olyan szakasz, mely szelő egyenes része, és végpontjai a körvonal pontjai (M és L). Az átmérő olyan húr, amely tartalmazza a középpontot. Ha egy kört egy átmérője, mint tengely körül megforgatunk, **gömböt** kapunk.

Manuális tevékenység

Kör—metszet modell:



A poszter elkészítését az EFOP-3.6.1-16-2016-00022 számú projekt támogatta.
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

