
Proceedings of the
Conference on Problem-based Learning
in Engineering Education

29th October 2015

organised by the
Department of Basic Technical Studies
Faculty of Engineering University of Debrecen

Edited by Imre Kocsis

ISBN 978-963-473-916-6

www.eng.unideb.hu/mat



Program Committee

IMRE KOCSIS PHD

BALÁZS KULCSÁR PHD

RITA NAGY-KONDOR PHD

MÁRIA PRINCZ PHD

GUSZTÁV ÁRON SZÍKI PHD

ADRIENN VARGA PHD

Organising Committee

ÉVA ÁDÁMKÓ

CSABA GÁBOR KÉZI PHD

ERIKA PERGE

ATTILA VÁMOSI



Contents

CONTRIBUTIONS IN ENGLISH

Éva ÁDÁMKÓ, Gábor JAKABÓCZKI (PBLEE/15/01)

Security analysis of Modbus RTU

Imre KOCSIS (PBLEE/15/02)

Application of Regression Models for Standard Time Calculation in
Manufacturing Process Control

CONTRIBUTIONS IN HUNGARIAN

Géza LÁMER (PBLEE/15/03)

Az egyensúly feltételeinek meghatározása geometriai és algebrai
módszerekkel a legfeljebb hat erőt tartalmazó erőrendszerekben

Gyöngyi SZANYI (PBLEE/15/04)

Fogalomképzetek és definíciók a függvényről

Attila SZÁNTÓ, Gusztáv Áron SZÍKI, Sándor HAJDU (PBLEE/15/05)

Elektromos hajtású versenyautó járműdinamikai modellezése

*Gyula DARAI, Gábor FILEP, Rita NAGYNÉ KONDOR, Gusztáv Áron SZÍKI
(PBLEE/15/06)*

Mozgástani kísérletek NI eszközökkel támogatva

Ivett Anita CSIZMADIA, Barnabás GYŐRI (PBLEE/15/07)

Megújuló villamosenergia-termelés szerepe egy kisváros
energiaellátásában

Zsolt VARGA, Herta CZÉDLI, Csaba KÉZI, Ákos FEKETE (PBLEE/15/08)

Ortofotók pontossági vizsgálata úttengelyek alapján

Edina CZINEGE, Csaba KÉZI (PBLEE/15/09)

A gazdasági folyamatok matematikai modellezésének módszertana

Anna KOVÁCS, Csaba KÉZI (PBLEE/15/10)

Játék- és döntéelmélet a közgazdaságtanban



Mária PRINCZ (PBLEE/15/11)

A Debreceni Egyetem Műszaki Kar gólyáinak Excel ismerete

Mária PRINCZ (PBLEE/15/12)

A mesterséges intelligencia hatása a munkahelyekre

Security analysis of Modbus RTU

É. ÁDÁMKÓ, G. JAKABÓCZKI

University of Debrecen, adamko.eva@eng.unideb.hu

University of Debrecen, jakaboczki.gabor@gmail.com

Abstract. SCADA, CIS, ICS and similar Modbus based systems were always the target of many types of attacks, but during the last decades because of the fast spread of the internet, these systems become much more vulnerable. This paper raises questions about the security of the Modbus RTU.

Introduction

Talking about smart homes, smart buildings, intelligent facilities, internet of things the following questions arisen in us:

Is SCADA or similar systems secure enough?

Which part of that systems is the more vulnerable?

Is there any solution to protect the communication channel?

If there are vulnerabilities in the communication, is it able to cause serious problems?

If it can, how serious is the damage?

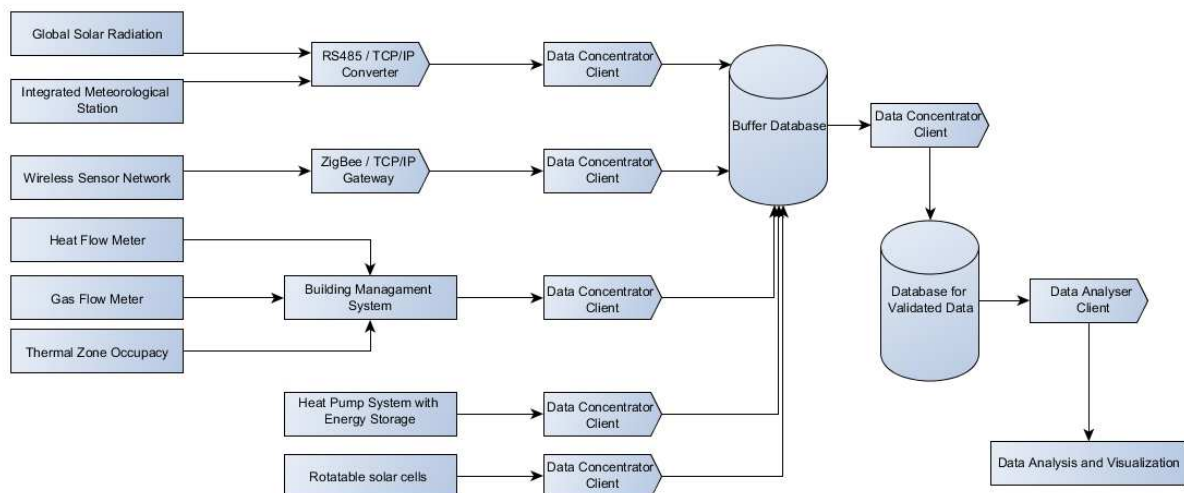


Figure 1. An example system. (SCADA system of the BMRC in University of Debrecen)

On the next pages we will try to answer these questions, but the aim of this case study is not to analyse the SCADA or similar systems vulnerabilities part by part in detail, but to investigate one part of it, which part is the communication protocol, and search successful or unsuccessful attacks against it. In this article, we focus on the MODBUS communication protocol because it is



a widespread communication standard in the particular field and 22% of the communication protocols used in these types of networks is Modbus.

1 Modbus serial place in the OSI/ISO model

The Modbus serial protocol is a Master-Slave protocol, taking place in the Data link layer of the OSI/ISO model. It is a request-reply protocol, typically one node, the Master, requests the transmission of data from the Slave devices. Usually the Slave nodes do not initiate the communication with the Master or with other Slaves. On the seventh layer of the OSI/ISO model the Modbus Application layer provides server-client communication. On the Modbus serial line the Masters act as clients and the Slaves as servers.

Layer	ISO/OSI Model	Modbus	
7	Application	MODBUS protocol	Application
6	Presentation		
5	Session		
4	Transport		
3	Network		
2	Data Link	MODBUS Serial Line Protocol	
1	Physical	ANSI/TIA/EIA-485-A-1998	

Table 1. The ISO/OSI model and the Modbus protocol.

2 The physical layer

As one of the most widespread serial communication protocols, Modbus serial usually use the ANSI/TIA/EIA-485-A-1998 standard (also known as RS485) as the physical communication layer.

Because the Master-Slave hierarchy of the Modbus protocol, the RS485 standard used in half-duplex mode, mainly with the two-wire configuration

3 The Master-Slave principle

On the Modbus serial line several Slaves can be connected, but only one Master at a time. Every Slave must have a unique address, only the Master can communicate successfully without it. As the Master initiates the communication, the Slave acknowledges the request and send back the required data. The Master device can issue these requests in either unicast (one slave) or broadcast (all slave nodes) modes. Upon receiving a broadcast message the Slaves do not send reply.

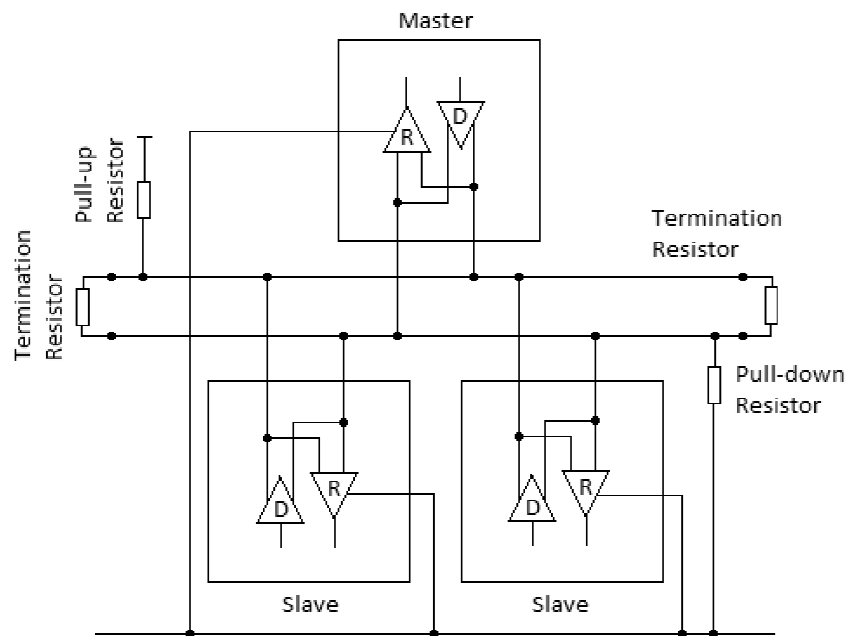


Figure 2. Typical Master-Slave configuration on RS485 serial network. Note the resistors.

4 The architecture of the Modbus serial frame

The Protocol Data Unit (PDU) of the Modbus protocol is simple and independent from the underlying layers. It is composed of a Function code that determines the action to be taken with the following Data segment. On the serial line the PDU is encapsulated in a frame that contains an address field and an error check part. The address field in the beginning of the frame is an address of a Slave (the target in unicast mode requests, or the origin if it is a reply of a slave) and the error check part is a CRC or LRC byte pair.

There are two coding methods to use, the ASCII where the data (and the entire frame) is sent in characters, or the RTU (Remote Terminal Unit) where the frame is composed of hexadecimal characters. The latter is the default, and its data throughput is greater than the ASCII method (due to character density).

5 Usage of Modbus serial

As the second biggest de facto standard in industrial applications (22%, Profibus 28% as of 2010) the Modbus serial protocol is widespread. Countless applications are known, like end point devices (intelligent actuators, sensors), data acquisition and control devices (PLCs, embedded controllers), on site control, monitoring and data presentation devices (industrial computers, HMIs and various displays) or servers and databanks.

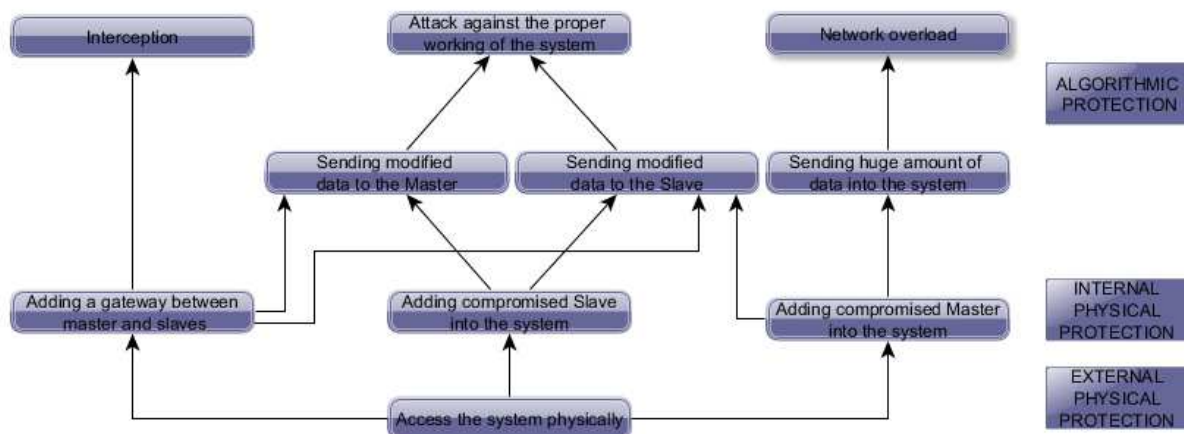


Figure 3. Attack-tree of Modbus RTU

6 The weaknesses of Modbus serial

On Figure 3. you can see the weaknesses of the Modbus serial protocol with the help of an attack-tree. Attack tree method is a common method for identifying vulnerabilities in communication protocols. As you can see the most obvious weakness of the protocol is the lack of built in security measures. There is no means of identifying a device on the bus, if we do not anticipate its presence. There is no built in command to discover connected devices or to verify their authenticity. And foremost the Master nodes do not have to have address, and can communicate over the bus without one. Another weakness is that the messages transmit over the medium without any encryption, in a simple and clear text format and can be read without decoding. In an imagined scenario, if an attacker successfully insert a transceiver device between two nodes, it can monitor, disrupt and modify the communication or compromise it entirely. So, we can declare -without any detailed analysis of the protocol- that several serious security breaches found in the communication through Modbus. Finally, we distinguished three levels of protection in the attack tree, these are external physical, internal physical and algorithmic level of protection. We do not deal with physical protection levels for obvious reasons our aim is to give proper solution on the algorithmic level of protection to get a safer and more resistant system. According to the attack tree the three event that can occur are the next:

- If the attacker is only watch the communication, its presence cannot be identified.



- No identification, anyone can pretend to be a master or a slave.
- The communication channel is easily overloaded.

7 Successful attacks

7.1 Attack against Modbus TCP protocol based systems

- 1982

In 1982 a part of the Trans-Siberian gas pipeline destroyed because of a Trojan virus got into its SCADA system. The explosion was equivalent with a three kilotons of TNT.

- 2003

In 2003 a US hydroelectric power plant decoy system lost all control because of a hacker group called APT1. In 2003 seven American states needed the work properly without electricity because of a malware destroyed some CIS. The blackout caused many damage, among other serious things, people died because of it.

- 2013

In 2013 two American cyber security experts took over the control of an oil rig. It could have been cause serious environmental disaster. The above listed events only a tiny part of the known attacks, and most of them happened because these SCADA, CIS and ICS had somehow linked to the internet. Several publications and researches investigate the vulnerabilities of internet linked SCADA systems, or in other words Modbus TCP based SCADA systems – as it mentioned before -, and of course several solution exists. Nevertheless these solution focus on to protect SCADA systems from attacker who come from the internet.

7.2 Attack against Modbus RTU protocol based systems

- 2010

From 2010 a malware called Stuxnet systematically destroyed a fifth of Iran's nuclear centrifuges by causing them to spin out of control. When the malware installed on a SCADA system it is able to access, read, write, and delete code blocks on the PLCs. It infects USB drives, and then spread like a common flu, that is why the solutions that secure against MODBUS/TCP did not work in this particular case.

- 2011

In 2011 McAfee reported that several of its customers (mainly corporations in the energy business) got hit by a series of attacks from Chinese origin. The primary goal of the attacks was not to disrupt or to cause damage, but to gather information on the affected companies SCADA network structure (and possible exploitable weaknesses).



- 2013

In 2013 two ICS expert compromised multiple industrial facilities through radio frequency channel. They took access over temperature sensors, and was able to falsify the real data. The ICS-CERT (Industrial Control Systems Cyber Emergency Response Team) monitoring report of 2013 states that in the first half of that year they discerned more than 200 attacks that targeted ICS systems. In their 2013 presentation at the 30th Chaos Communication Congress, the SCADA Strangelove team reported their findings about the vulnerabilities of several industrial protocols including Modbus. They exploited “zero day” bugs and took over entire networks within the matter of hours. When a viewer asked after the presentation if the team could take over nuclear plants or similar networks the presenters stated: “It would be better to answer that question backstage, in private.”

8 Conclusion

We come to the point to answer the questions of the introduction section. The answer for the first question is clearly no, we can say it because in the previous section lot of successful attacks were presented, and these cases are only the top of the iceberg. Answering to the second question in the absence of a thorough investigation may seem to be guesswork, but it can be said that every system – consisting any types of devices - depends on the underlying communication channel. That is the reason, why we choose the Modbus protocol as the main topic of this paper. As you can read in the previous sections there are several possible solution to make Modbus PLC communication more secure, but there are not any solution (or not cryptographically secure solution) for Modbus RTU. Modbus communication protocols are backbones of SCADA and CIS systems, which responsible for critical tasks, so ruin such systems can cause not only enormous material damage, but can costs lives.

9 Future work

After investigating these cases we can say, that a proper solution is needed to make communication over Modbus RTU secure, and make SCADA systems more reliable, from this point of view too. In the next months we plan to design a secure and cryptographically correct communication protocol on the Modbus RTU standard and implement on AVR microcontrollers.



References

- [1] T. Simonite, *Chinese Hacking Team Caught Taking Over Decoy Water Plant*. (2013) Online: <http://www.technologyreview.com/news/517786/chinese-hackingteam-caught-taking-over-decoy-water-plant>
- [2] Smith, *Not cyber myths: Hacking oil rigs, water plants, industrial infrastructure* (2013) Online: <http://www.networkworld.com/article/2225104/microsoft-subnet/not-cyber-myths--hacking-oil-rigs--water-plants--industrial-infrastructure.html>
- [3] R. K. Ackerman, *SCADA Systems Face Diverse Software Attack Threats* (July 31, 2013) Online: <http://www.afcea.org/content/?q=scada-systems-face-diverse-software-attack-threats>
- [4] D. Albright, P. Brannan, C. Walrond, *Did Stuxnet Take Out 1,000 Centrifuges at the Natanz Enrichment Plant?* Institute for Science and International Security, 2010.
- [5] G. Keizer, *Sloppy'Chinese hackers scored data-theft coup with 'Night Dragon'*. Computerworld, February 11 (2011).
- [6] D. Storm, *Brute-force cyberattacks against critical infrastructure, energy industry, intensify* (July 2, 2013) Online: <http://www.computerworld.com/article/2473941/cybercrime-hacking/brute-force-cyberattacks-against-critical-infrastructure--energy-industry--intens.html>
- [7] L. Apa, C. M. P. Hollman, *Compromising Industrial Facilities from 40 Miles Away*, IOActive Technical White Paper (2013).
- [8] C. W. Ten, C. C. Liu, G. Manimaran, *Vulnerability assessment of cybersecurity for SCADA systems*. *Power Systems*, IEEE Transactions on 23.4 (2008): 1836-1846.
- [9] B. Zhu, A. Joseph, S. Sastry, *A taxonomy of cyber-attacks on SCADA systems*. Internet of things (iThings/CPSCoM), 2011 international conference on and 4th international conference on cyber, physical and social computing. IEEE, 2011.
- [10] ICS-CERT Year in Review, Industrial Control Systems Cyber Emergency Response Team, 2013



Application of Regression Models for Standard Time Calculation in Manufacturing Process Control

I. Kocsis

University of Debrecen, kocsisi@eng.unideb.hu

Abstract. As an element of the scientific management, time and motion study is a business efficiency technique. Time study aims to establish standard times, while motion study is a technique for improving work methods, the combination of them constitutes a basic engineering tool in work system analysis and improvement. Time requirement of tasks can be measured, calculated from technological data, or estimated with statistical analysis on the basis of historical time data related to basic operations. A tool in the analysis is the establishment of a regression model to find the connection between the technological parameters, the geometrical, physical parameters of the part and the time requirement of a manufacturing operation. In REFA methodology one variable regression is used generally for time calculation. In this paper an industrial example is presented and application of multiple regression models is posed.

Introduction

Time study is a direct and continuous observation of a task, recording the time taken to accomplish a task. Time study historically used in the manufacturing industry to evolve pay scales, today it is used for performance evaluations, planning and time cost analysis. Its objective is to determine a standard time for a job by using observers to record exactly how much time is being devoted to each task.

Time study defined as "a work measurement technique consisting of careful time measurement of the task with a time measuring instrument, adjusted for any observed variance from normal effort or pace and to allow adequate time for such items as foreign elements, unavoidable or machine delays, rest to overcome fatigue, and personal needs." (Industrial Engineering Terminology Standard [1].)

Elemental time data establishes standards based on previously completed time studies, stored in an organization's database. At its most basic level time studies involved breaking down each job into component parts, timing each part and rearranging the parts into the most efficient method of working.

The main steps of a direct time study procedure: define the standard method, divide the task into work elements, time the work elements to obtain the observed time for the task, evaluate the worker's pace relative to standard performance (performance rating) to determine the normal time, apply an allowance to the normal time to compute the standard time.



A comprehensive time study consists of study goal setting; experimental design; time data collection; data analysis; reporting. Well-known quantities used in time studies:

Actual time is the time a particular employee actually takes to perform a particular job operation.

Cycle Time (worker/machine) is the total time required to complete one cycle of an operation.

Performance rating factor is a subjective estimate of a worker's pace relative to a normal work pace.

Normal time is the time needed to complete on operation by an employee working at 100% efficiency having no delays.

$$\text{Normal time} = \text{Mean observed time} \times \text{Performance rating factor} / 100$$

Allowance factor is the amount of time allowed for personal, fatigue, and unavoidable delays. It represents time lost due to personal factors, shift adjustments, improper equipment, fatigue, and related issues taking into consideration personal factors as well as unavoidable constraints encountered in the work situation.

Standard time is the time needed to complete on operation by an employee working at 100% efficiency with unavoidable delays.

$$\text{Standard time} = \text{Normal time} - \text{Allowance time}$$

or

$$\text{Standard time} = \text{Normal time} \times \text{Allowance factor}$$

Standard time is used in costing the labour component of products; tracking employee performance; scheduling and planning required resources.

In order to assign a defined process time all possible work activities are measured and documented, process times are established for the single operations in the manufacturing process.

Most techniques for determining standardized process time have been developed under the assumption that products are processed continuously and repeatedly in a repetitive manufacturing process [2]. There are manufacturing companies where the high variability between the single projects results in a very low repetition frequency of similar or equal elements, therefore these companies are not able to install a solid production planning and control. The estimation of man-hours required to operations is frequently based on the experience of single personnel staff, so estimation of precise process times and reliable time scheduling is difficult and costly to define.

Firms need an individual instrument or methodology for determination of manufacturing process times. REFA gives suggestion about how this time determination could be successfully applied where products and components are changing often from project to project [3].



REFA-methodology [4] describes three generally applicable ways for the determination of standardized process times:

- calculation of process times through mathematical functions;
- comparison through historical data and product information in the archive (suitable only for repetitive products or similar products);
- estimation of production times by experienced personnel.

It is possible to generate in a systematical and structured way a process library and the associated manufacturing sequence for every component processed in the manufacturing workshop.

1 Standard time calculation in aircraft cabin element production

In this study the Time Management System of Diehl Aircabin Hungary Kft, a part of the Diehl Production System, is investigated. Diehl Aerosystems, a leading partner for aircraft cabin design and integration as well as first tier supplier for avionics solutions. Diehl Aircabin Hungary Kft. operates as a subsidiary of Diehl Aircabin, based in Laupheim, Germany, one of currently four operating units under the Diehl Aerosystems umbrella.

The main characteristics of the aircraft cabin element production in Diehl Aircabin Hungary Kft:

- high quality requirements (aircraft manufacturing standards, Diehl Production System);
- high variability of the size and geometry of products;
- frequently changing products (small batch production);
- high rate of manual work;
- high variability of time requirement of operations (from a few minutes to several hours);
- high productivity requirements.

Because of high variability of products and high rate of manual work the standard time calculation has crucial role in manufacturing processes planning and control. In time management the REFA methodology is used.

The REFA-methodology is an industrial proven instrument for time determination in repetitive manufacturing processes that gives a general overview how process times can be determined. REFA gives suggestions about how this time determination could be successfully applied where products and components are changing often from project to project.

In repetitive manufacturing production is generally paced at a certain takt time. When the variance of manufacturing times is high the estimation of precise process times becomes difficult and costly. Human workers have varying physical, mental, and emotional conditions and work under varying environmental circumstances. This variety makes standardized process times extremely difficult to determine. Other factors influencing the accuracy of determined process

times could be the operator specificity and qualification; the firm-level or operator-level experience; environmental conditions; and the technology used.



Figure 1. Air duct for an Airbus air conditioning system.

Determination of manufacturing times and scheduling of the production need customized approach, the standardized process times have to be defined on the basis of suitable parameters or characteristics. REFA-methodology describes three generally applicable ways for the determination of standardized process times:

- calculation of process times through mathematical functions;
- comparison through historical data and product information in the archive (suitable only for repetitive products or similar products);
- estimation of production times by experienced personnel.

Process time includes all the needed activities for determined manufacturing activity. The three different process time categories:

- parameterizable process times (calculate),
- categorizable process times (compare),
- non-definable process times (estimate/measure).

For calculation of the standard times for new products a database of the time requirements of the standard job elements is being built and connections between the parameters of the product (part) and the time of operations are analyzed.

In the bonding process the length of bonding line is the most influential parameter. The mapping between the length of bonding line and time requirement is analyzed and regression functions are determined for the operations. Table 1 shows the time requirement of three operations of bonding as a function of the length of bonding line (data refer seven different parts).

Time requirement (min)	Length of bonding line (mm)						
	500	750	1000	1100	1300	1400	3000
apply adhesive	1.212	2.172	1.272	1.716	2.076	1.875	4.176
apply / remove clips	1.109	1.116	1.344	1.311	2.940	1.472	1.068
remove needless adhesive	1.092	0.794	1.035	0.219	0.840	0.552	3.156

Table 1. Time requirement vs. Length of bonding line.

The analysis is currently based on a one variable linear or non-linear regression model. Regression functions regarding the standard elementary operations, got from the regression analysis of measured data, are gathered in software and used for the estimation of standard times for production planning of the new products.

In Figure 2 linear regression functions are presented for the time requirement of three above mentioned operations (see Table 1).

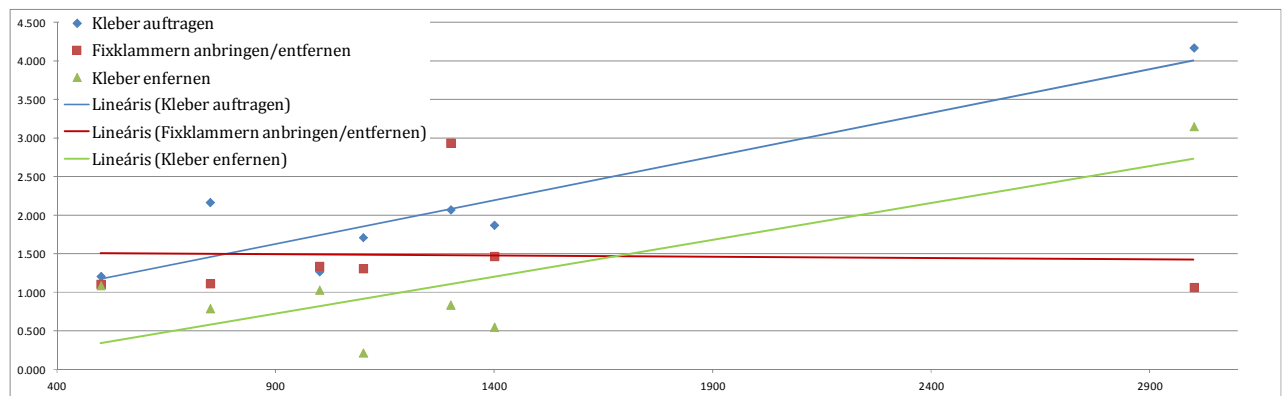


Figure 2. Linear regression functions.

2 Application of multiple regression

The goal of the ongoing research project is to determine further variables influencing the time requirement of operations, and to apply linear, non-linear or non-parametric multiple regression models for estimation of standard times.

Possible parameters for calculation of standard time of bonding are

- the length of the bonding line;
- the diameter of the part (maximum distance between the points of the part);
- surface area of the part;

furthermore some parameters characterizing the complexity of the bonding line (curve), namely

- the ratio of non-straight curve segments in the total bonding length ;
- the ratio of segments different from straight line and circle in the total bonding length;
- the ratio of non-plane curve segments in the total bonding length.

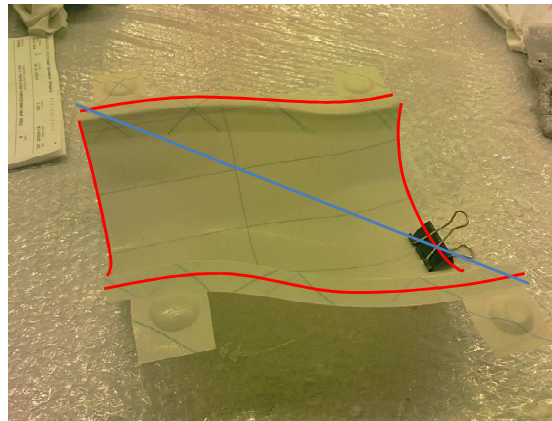


Figure 3. Parameters for a multiple regression model.

References

- [1] IIE, ANSI, 1982
- [2] S. K. Chang, S. C. Myung, J. R. Jae, *A Case Study for Determining Standard Time in a Multi-Pattern and Short Life-Cycle Production System*. Computers & Industrial Engineering, Vol. 53, No. 2, 2007, 321–325.
- [3] D.T. Matt, P. Ilmer, E. Rauch, *Methodology for the determination of manufacturing process times in the ETO (Engineer-to-order) sector – a case study*, XI AITeM Conference, At San Benedetto del Tronto, Italy, Volume: Enhancing the Science of Manufacturing, 2013
- [4] REFA, 1997. *REFA-Methodenlehre der Betriebsorganisation. Teil Datenermittlung*, Carl Hanser Verlag, Munich.



Az egyensúly feltételeinek meghatározása geometriai és algebrai módszerekkel a legfeljebb hat erőt tartalmazó erőrendszerekben

LÁMER G.

University of Debrecen, glammer@eng.unideb.hu

Abstract. The conditions of equilibrium of forces can be formulated that the resulting force and resulting moment equivalent to zeros. At the same time the conditions of equilibrium of system containing at most six forces can be formulated as geometrically or algebraically relations: let belong the lines of action of forces to a subspace of three dimensional Euclid space, or let exist nontrivial solutions of the six homogeneous equation of equilibrium wrote down by Plücker-coordinates. In the paper we give a systematically survey the conditions of equilibrium of system containing at most six forces using geometric and/or algebraic method.

Key words. Erők egyensúlya, az egyensúlyi egyenletek Plücker-féle koordinátában, az egyensúly geometriai feltételei

Bevezetés

A statika axiómái között találjuk a két erő egyensúlyára vonatkozó feltételt (lásd pl. Cholnoky p. 47.): két erő akkor van egyensúlyban, ha a két erő egy egyenesbe esik, a két erő nagysága azonos, a két erő értelme ellentétes. A statikára vonatkozó axiómarendszerek egyike (lásd pl. Cholnoky pp. 47-51) tartalmazza a három erőre vonatkozó (egyik) egyensúlyi állapot feltételét (pp. 48-49, uo.): három erő akkor van egyensúlyban, ha a három erő egy síkba esik, a három erő hatásvonala egy (végesben lévő) pontban metszi egymás, a három erő zárt nyílfolytonos erőpoligont alkot.

Megjegyzések. 1. Metszéspont alatt rendszerint egy végesben lévő pontot szokás érteni. Ha a három hatásvonal egy végtelen távoli pontban metszi egymást, azaz párhuzamosak, a fenti megfogalmazás szükséges, de nem elégséges: a szükségességhez hozzátartozik, hogy az erőknek a hatásvonalakat tartalmazó síkra merőleges egyenesre vett nyomatékösszege is legyen zérus. 2. Ha a statika axiómái közé két egyensúlyi erőrendszer összegére vonatkozó állítást vesszük fel, akkor a három erő egyensúlyára vonatkozó (fenti) állítás tétellé válik.

A két, illetve három erő egyensúlyára vonatkozó állítás általánosítása két irányba történhet. Egyrészt azt használhatjuk ki, hogy az erők hatásvonalai egy pontban metszik egymást, azaz, hogy centrálisak, vagy azt, hogy a hatásvonalak a háromdimenziós tér egy egy-, illetve egy kétdimenziós alterébe esnek.



Centrálisnak tekintve az erőket, a két, illetve három erő egyensúlyára vonatkozó állítás megfogalmazható geometriai formában, egy-egy szimplexre vonatkozó állításként. Messe egymást két, illetve három erő hatásvonala egy (végesben lévő) pontban. A metszéspontból mérjük fel a két, illetve három erőt. Tekintsük a két, illetve három erő végpontjai alkotta egy-, illetve kétdimenziós szimplexet (szakaszt, illetve háromszöget)! Ha az egy-, illetve kétdimenziós szimplex súlypontja egybeesik az erők hatásvonalainak metszéspontjával, akkor az erők egyensúlyban vannak. Az állítás kiterjeszthető tetszőleges $(n + 1)$ erőnek az n -dimenziós térben elfoglalt helyzetére, illetve annak háromdimenziós térbe, vagy a kétdimenziós síkba való vetületére (lásd Lámer 2012 és 2014).

A tér egy egy-, illetve egy kétdimenziós alterébe eső két, illetve három erő egyensúlyára vonatkozó állításból azt a részt emeljük ki, hogy az erők hatásvonalai, mint geometriai objektumok egymáshoz kötöttek, egy geometriai objektumhoz tartoznak, azaz a hatásvonalakat leíró egyenletek között kapcsolat áll fenn. Ez a kapcsolat az erőrendszer nyomatéki nullegyeneseivel fogalmazható meg: azok az egyenesek, amelyre nézve az erőrendszert alkotó minden erő együttesen nulla nyomatékot ad. Ezeknek az egyeneseknek a vizsgálata megmutatja, hogy az erők hatásvonalai milyen geometriai objektumhoz tartoznak. Kizárva az elfajuló eseteket, kitérő hatásvonalak esetén a XIX. sz-i vizsgálatok arra az eredményre jutottak (elsősorban Möbius, Darboux és Szomov járultak hozzá az eredményekhez, lásd Appell pp. 159-163), hogy négy erő hatásvonala egy vonalfelülethez (egyköpenyű hiperboloidhoz, vagy egy hiperbolikus paraboloidhoz), öt erő hatásvonala egy lineáris kongruenciához, hat erő hatásvonala egy lineáris komplexushoz tartozik (lásd pl. Appell pp. 159-163, Strommer pp. 174-176).

1. Az egyensúly szükséges és elégséges feltételei

Egy erőrendszer mindig redukálható a tér egy pontjához kötött eredő erő (**R**) és eredő erőpár (**M**) együttesére. Ezzel a két fogalommal az erőrendszer osztályozható (Lásd pl. Appel pp. 39, CHOLNOKY pp. 387-398):

- **R** ≠ **0** és **M** ≠ **0**: eredő dinám,
- **R** ≠ **0** és **M** = **0**: eredő erő.
- **R** = **0** és **M** ≠ **0**: eredő nyomaték.
- **R** = **0** és **M** = **0**: egyensúly.

Az egyensúly szükség és elégséges feltétele, hogy az eredő erő és az eredő nyomaték váljon zérussá. A feltételeket különböző formában fogalmazhatjuk meg. Rendszerint az eredő erőt és az eredő nyomatékot vektorként állítjuk elő, és a komponenseinek eltűnését követeljük meg.

Ebben a dolgozatban az egyensúly szükséges és elégséges feltételeit az egyenes vonalkoordinátái segítségével fogalmazzuk meg. Legyen adott egy egyenesen egy egységnyi hosszúságú szakasz! Az egységnyi hosszúságú szakasznak a három tengelyre vett vetületét jelölje $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, az egységnyi hosszúságú szakasznak a három tengelyre vett nyomatékát jelölje $\beta_x, \beta_y, \beta_z$. Az $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$



és $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ mennyiségek az egyenes Plücker-féle koordinátái (Strommer pp. 363-365). Fennállnak közöttük az alábbi összefüggések:

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1; \quad \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z = 0. \quad (1)$$

Ez első összefüggés azt jelenti, hogy a három $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ iránykoszinusz közül legalább egy nem zérus. A második összefüggés azt jelenti, hogy az $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ iránykoszinuszokból alkotott vektor és a $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ nyomatékkordinátákból alkotott vektor egymásra merőleges. Ha a szakaszt hordozó egyenes szeli valamelyik koordinátavonalat, akkor az arra vett nyomaték zérus. Ebből az is következik, hogy lehetséges olyan eset is, amikor mindhárom nyomatékkordináta zérus: a szakaszt hordozó egyenes áthalad a koordinátarendszer kezdőpontján.

Legyen adott n erő! Az erőket adjuk meg az erők hatásvonalainak a Plücker-féle koordinátájával (lásd pl. Appel pp. 162, Strommer pp. 365-366)), valamint az erő nagyságával, amit F_i -vel jelölünk. Ekkor az erők egyensúlyára vonatkozó feltételek, az eredő erő és eredő nyomaték legyen zérus, az alábbi hat (skalár)egyenlettel adható meg (lásd pl. Appel pp. 162):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_{xi} F_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{yi} F_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{zi} F_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n \beta_{xi} F_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_{yi} F_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_{zi} F_i = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Vizsgáljuk meg a (2) egyenletrendszert az erők egy egyedi elrendezésére! A centrális erők esetén a koordinátarendszer kezdőpontját választhatjuk a centrumnak. Ekkor az erőrendszer leírásában szereplő összes nyomatékkordináta zérus, és a nyomatéki egyenletek automatikusan teljesülnek. Mivel a térben három független irány van, ezért négy, öt és hat erő esetén három, tetszőlegesen kiválasztott erővel a többi, azaz rendre egy, kettő, illetve három erő egyensúlyozható. Azaz centrális erők esetén egy, kettő és három erő egyensúlyára nézve kell feltételeket felállítani. A fentieket figyelembe véve, az általánosság megsértése nélkül, a centrális erőket kizárhatjuk a vizsgálatokból (különösen, ha az erők száma 4, 5 vagy 6). Azaz (1) alapján az iránykoszinuszok közül legalább egy, a centrális erők kizárása következtében a nyomatékkordináták közül legalább egy nem zérus.

Tekintsük a (2) egyenletrendszert tetszőleges (kitérő, vagy legalábbis szétszórt) erők esetén! Hatnál több erő esetén az n erőből tetszőlegesen kiválasztva hat erőt, ez a hat erő kifejezhető a többi, azaz az $(n - 6)$ erővel. Ebben az esetben a hat erőre nézve az egyenletrendszer inhomogén. Az egyenletrendszert többnyire algebrai módszerekkel oldjuk meg. Az egyértelmű megoldhatóságnak, azaz az egyensúly fennállásának feltétele van, nevezetesen, hogy az egyenletrendszer együttható mátrixának a determinánsa legyen zérustól eltérő. Ha úgy választottunk meg hat erőt, hogy az egyensúlyi egyenletekben az együtthatómátrix determinánsa zérustól különböző, akkor az erők nagyságát paramétereknek tekintve a többi, az $(n - 6)$ erő tetszőleges elrendezése mellett mindig található egyensúlyozó erőrendszer.

Másképpen áll a helyzet legfeljebb hat erő esetén. Az egyensúly feltételeit magába foglaló (2) egyenletrendszer homogén, lineáris algebrai egyenletrendszer. Ennek okán triviálisról eltérő megoldás csak akkor létezik, ha az egyenletrendszer mátrixa determinánsának rangja megegye-



zik az oszlopok számával. Ez a feltétel viszont a legfeljebb hat erőt tartalmazó erőrendszerben szereplő erőkre nézve ír elő korlátozó feltételeket. A korlátozó feltételeket meghatározhatjuk a (2) egyenletrendszer algebrai megoldásával, ezt fogjuk röviden algebrai módszernek tekinteni. A korlátozó feltételeket megfogalmazhatjuk egyenesekre vett nyomatékok segítségével is. Formálisan ez a változat is hat egyenletre vezet, amely algebrai módszerekkel is megoldható. Ugyanakkor egy egyenesre vett nyomaték eltűnése megfogalmazható speciális, geometriai formában is: szelje a kiválasztott egyenes az összes erő hatásvonalát. Az egyensúlyra vonatkozó feltételnek a minden erő hatásvonalán áthaladó egyenes segítségével történő meghatározását fogjuk röviden geometriai módszernek tekinteni.

Megjegyzés. A fentebb röviden algebrainak nevezett módszer szükséges és elégséges feltétel meghatározását teszi lehetővé. A fentebb röviden geometriainak nevezett módszer szükséges, de nem elégséges: a hatásvonalakat szelő egyenesekkel az erőknek a térbeli elrendezésre vonatkozó ismeretek nyerhetők, de az erők nagyságára vonatkozó ismeret nem. Ugyanis az erők nagyságától függetlenül fennállnak a nyomatéki egyenletek. Ezért a geometriai módszert az erők hatásvonalainak egymáshoz viszonyított helyzetének meghatározásához használjuk fel, a szükségesség igazolásához rendszerint az algebrai módszert fogjuk alkalmazni.

2. Az egyensúly egy szükséges feltétele

Egyensúly esetén az erőrendszernek a tér bármely egyenesére vett eredő nyomatéka zérus. Egy nem egyensúlyi erőrendszerhez is tartozhat olyan egyenes, amelyre nézve az erőrendszernek az eredő nyomatéka zérus. Ezt szokás nyomatéki nullvonalnak nevezni. Egy erőrendszer nyomatéki nullvonala lehet az az egyenes, amely átmegy minden erő hatásvonalán.

Ismert a következő tétel: ha létezik egy olyan egyenes, amely egy n erőből álló *egyensúlyi erőrendszer* ($n - 1$) erejének hatásvonalán átmegy, akkor az az egyenes átmegy az erőrendszer n -dik erő hatásvonalán is (lásd pl. Appell pp. 161, Lámer 2014). A tételre az *Együvé tartozás tétele* néven fogunk hivatkozni. Ennek a tételnek a segítségével a legfeljebb hat erőből álló erőrendszerre vonatkozó egyensúly szükséges feltétele geometriai formában fogalmazható meg.

3. Egy erő esete

Az egyensúly feltételeit egy erő esetén a következő hat egyenlet adja:

$$\begin{aligned}\alpha_x F &= 0, & \alpha_y F &= 0, & \alpha_z F &= 0, \\ \beta_x F &= 0, & \beta_y F &= 0, & \beta_z F &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

A hat egyenletben szereplő együtthatóra nézve fennáll az (1) összefüggés. Ez biztosítja, hogy az α_x , α_y és α_z közül legalább egy együttható zérustól különböző legyen. Mivel kizárható, hogy mind a hat együtthatók egyidejűleg zérus legyen, a (3) alatti hat homogén egyenlet akkor teljesül, ha az F értéke zérus. Tehát az egyensúly szükséges és elégséges feltétele, hogy az F értéke legyen zérus, másképpen fogalmazva, az erő nagysága legyen zérus.



Egy erő esetén az egyensúly szükséges és elégséges feltétele csak és kizárólag az erő nagyságára vonatkozik, ez utóbbi viszonyt meghatározza a nagyság abszolút értékét.

Megjegyzések. 1. Az állítás triviális. Rendszerint egy erő egyensúlyáról nem is szoktunk beszélni. 2. Egy erő esetén az *Együvé tartozás tétele* érdemben nem alkalmazható. Az erő hatásvonalát szelő minden egyenes, egyúttal maga a hatásvonal is, nyomatéki nullvonal. Ez az egyensúly szükséges, de nem elégséges feltétele. A szükségességhez legalább még egy, az erő hatásvonalára nézve kitérő egyenesre vett nyomatékról is meg kell követelni, hogy zérus legyen.

4. Két erő esete

Az egyensúly feltétele két erő esetén a következő hat egyenlet:

$$\begin{aligned} \alpha_{1x}F_1 + \alpha_{2x}F_2 = 0, \quad \alpha_{1y}F_1 + \alpha_{2y}F_2 = 0, \quad \alpha_{1z}F_1 + \alpha_{2z}F_2 = 0, \\ \beta_{1x}F_1 + \beta_{2x}F_2 = 0, \quad \beta_{1y}F_1 + \beta_{2y}F_2 = 0, \quad \beta_{1z}F_1 + \beta_{2z}F_2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

A homogén egyenletrendszer egyértelmű megoldásának feltétele, hogy legyen legalább két olyan egyenlet, amely együtthatómátrixának determinánsa zérus. Tekintsük az

$$\begin{aligned} \alpha_{1x}F_1 + \alpha_{2x}F_2 = 0, \\ \alpha_{1y}F_1 + \alpha_{2y}F_2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

egyenletrendszert! Az (1) összefüggés alapján kizárható, hogy az (5) egyenletrendszer összes együtthatója egyidejűleg zérus legyen. Egy nem csupa zérusból álló másodrendű mátrix determinánsa akkor lesz zérus, ha a mátrix két oszlopa lineárisan összefügg, azaz az „egyik” oszlop arányos a „másik” oszloppal:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Ezt követően tekintsük az

$$\begin{aligned} \alpha_{1x}F_1 + \alpha_{2x}F_2 = 0, \\ \alpha_{1z}F_1 + \alpha_{2z}F_2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

egyenletrendszert! Az (5) egyenletrendszer vizsgálatánál alkalmazott eljárást követve a nem triviális megoldás feltétele, hogy a két oszlop legyen arányos:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1z} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2z} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Figyelemmel (6) összefüggésre (8) összefüggés csak $\mu = \lambda$ feltétel mellett áll fenn. Az iránykoszinusz fogalma miatt (lásd az (1) összefüggést) a λ arányossági tényező csak egy (illetve mínusz egy) lehet. Hasonló módon látható be, hogy a második hatásvonal nyomatékkordinátái arányosak az első hatásvonal nyomatékkordinátaival. A kétféle arányossági tényező megegyezik, hiszen választhatjuk egyszerre a szakasz egyik iránykoszinuszát és a szakasz egyik



nyomatékkordinátáját is. Következésképpen a két egyenes Plücker-féle koordinátái megegyeznek.

Amennyiben az $\alpha_{1w} = \alpha_{2w}$ és a $\beta_{1w} = \beta_{2w}$ ($w = x, y, z$), úgy (4) egyenletrendszer csak az

$$F_1 = -F_2 \quad (9)$$

feltétel mellett teljesül. Szavakban megfogalmazva, a két erő egy egyenesbe esik, nagyságuk egyenlő, értelmük ellentétes.

Két erő esetén az egyensúly szükséges és elégséges feltétele vonatkozik egyrészt az erők egymáshoz viszonyított elhelyezkedésére (a két hatásvonal egybeesik), másrészt a két erőnek egymáshoz viszonyított nagyságára (azok megegyeznek), harmadrészt az erő értelmére (azok ellentétesek). A két utóbbi azt a tényt állapítja meg, hogy ha két erő centrális elrendezésű, akkor az eredő erejük zérus. Az első feltétel megadja a hatásvonalak elrendezései közül azokat, amely esetén az egyes erőket a saját hatásvonalán eltolva az egyensúly fennáll: a két hatásvonal egybeesik.

Az egyensúlynak a hatásvonal elrendezésére vonatkozó szükséges (de nem elégséges) feltétele meghatározható geometriai módszerrel is.

Szelje az egyik erő e_1 hatásvonalát két kitérő egyenes! A metszéspontokat jelölje A és B . Az *Együvé tartozás tétele* értelmében két kitérő egyenesre nézve a másik erő akkor ad zérus nyomatékot, ha annak e_2 hatásvonala szeli a két, egymásra nézve kitérő egyenest. A metszéspontokat jelölje C és D . (A és C , valamint B és D legyenek egy-egy kitérő egyenesen.) Az ABC sík minden egyenesre átmegy az első erő hatásvonalán, azaz az első erőre nézve zérus nyomatékot ad, tehát ennek a síknak át kell haladnia a másik erő hatásvonalán. Az ABC helyett választhatnók az ABD , vagy az ACD , illetve a BCD síkot is, hasonló eredményre jutnánk. Tehát első lépésben megállapítottuk, hogy a két erő hatásvonala egy síkban helyezkedik el. Most az *Együvé tartozás tételét* az egyik erőt szelő, a két erő hatásvonalai által kifeszített síkra merőleges egyenesre alkalmazzuk. Ennek a következménye, hogy a két hatásvonalnak metszeni kell egymást az imént értelmezett metszéspontban. Végül tekintsünk egy, az egyik erőt a már felvett metszésponttól eltérő pontban szelő, a két erő hatásvonala által kifeszített síkra merőleges egyenest. Erre alkalmazva az *Együvé tartozás tételét* azt nyerjük, hogy a két erő hatásvonalának egybe kell esnie.

Mivel az *Együvé tartozás tétele* csak a nyomatéki egyensúly teljesülését biztosítja, ezért a vetületi egyenletek teljesüléséhez az erők hosszára vonatkozó feltételt kell kiróni. Kétféleképpen járhatunk el. Az egyik, hogy megköveteljük, hogy egy, a két egybeeső hatásvonalra nézve kitérő egyenesre vett nyomaték is legyen zérus. Ennek a következménye, hogy a két erő nagysága legyen egyenlő, irányuk ellentétes. A második, hogy eleve azt tételezzük fel – a (4) egyenletrendszer első három egyenlete alapján –, hogy a két erő vektoriális összege zérus. Ez éppen azt jelenti, hogy állásuk és nagyságuk azonos, irányuk ellentétes.

5. Három erő esete

Az egyensúly feltételét három erő esetén a következő hat egyenlet fejezi ki:

$$\begin{aligned} \alpha_{1x}F_1 + \alpha_{2x}F_2 + \alpha_{3x}F_3 = 0, & \quad \alpha_{1y}F_1 + \alpha_{2y}F_2 + \alpha_{3y}F_3 = 0, & \quad \alpha_{1z}F_1 + \alpha_{2z}F_2 + \alpha_{3z}F_3 = 0, \\ \beta_{1x}F_1 + \beta_{2x}F_2 + \beta_{3x}F_3 = 0, & \quad \beta_{1y}F_1 + \beta_{2y}F_2 + \beta_{3y}F_3 = 0, & \quad \beta_{1z}F_1 + \beta_{2z}F_2 + \beta_{3z}F_3 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Először tekintsük az első három egyenletet! Ennek a homogén egyenletrendszernek egyértelmű megoldásának feltétele, hogy az egyenlet együtthatómátrixának determinánsa legyen zérus. (Az (1) összefüggés alapján kizárható, hogy minden iránykoszinusz egyidejűleg zérus legyen.) Egy nem csak zérus komponensekből álló harmadrendű mátrix determinánsa akkor lesz zérus, ha a mátrix egyik oszlopa a másik két oszlopával lineárisan összefügg, pl. a harmadik oszlop az első kettő lineáris kombinációjaként állítható elő:

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{1z} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \alpha_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \alpha_{3z} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

ha két,

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \alpha_{2z} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

vagy ha mind a három oszlop arányos egymással:

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{1z} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \alpha_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \alpha_{3z} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

A (11) összefüggés azt jelenti, hogy a harmadik hatásvonal irányvektora a két másik hatásvonal irányvektorainak lineáris kombinációjaként áll elő. Ebből az következik, hogy ha a három hatásvonal irányvektorait egy pontba toljuk el, akkor azok egy síkban vannak. Ez csak úgy lehetséges, ha a három hatásvonal egymással párhuzamos síkokban helyezkedik el. Most tekintsük három további, a (10) egyenletrendszerből kiválasztható különböző egyenletrendszert! Az első két egyenlethez csatoljuk hozzá a 4., az 5., illetve a 6. egyenletet. Ekkor a három-három homogén egyenletből álló egyenletrendszer együtthatómátrixa determinánsának eltűnéséből az következik, hogy fennállnak a (11)-zel analóg lineáris összefüggések:

$$\lambda_w \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \beta_{1w} \end{bmatrix} + \mu_w \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \beta_{2w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \beta_{3w} \end{bmatrix}, \quad (w = x, y, z). \quad (14)$$

A (11) összefüggés miatt (14) csak úgy teljesülhet, ha



$$\lambda_w = \lambda, \text{ és } \mu_w = \mu \quad (w = x, y, z). \quad (15)$$

E szerint a harmadik erő hatásvonalának iránykoszinuszai és a nyomatékkordinátái az első két erő hatásvonalának iránykoszinuszainak, illetve nyomatékkordinátáinak lineáris kombinációja. Ebből nem csak az következik, hogy az irányvektorok, egy pontból felmérve, egy síkban vannak, hanem az is, hogy a három hatásvonal egy síkban fekszik, és egy pontban metszi egymást. Az állítás bizonyításához elegendő az alábbi azonosságsort felírni:

$$\beta_3 = \mathbf{r} \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{r} \times (\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2) = \lambda \mathbf{r} \times \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{r} \times \mathbf{a}_2 = \lambda \beta_1 + \mu \beta_2. \quad (16)$$

Az α_i és β_i ($i = 1, 2, 3$) vektorokba az i -edik hatásvonal iránykoszinuszait és nyomatékkordinátáit foglaltuk össze.

A (10) egyenletrendszer (11) feltétel melletti vizsgálata azt mutatja, hogy három erő akkor van egyensúlyban, ha a három erő egy síkban van, hatásvonaluk egy pontban metszi egymást, és az erők vektoriális összege zérus.

A (12) összefüggés azt jelenti, hogy a három hatásvonalból kettőnek az irányvektora egybeesik, azaz ez a két hatásvonal párhuzamos. Ebből az is következik, hogy λ csak egy lehet. Hasonlóan ahhoz, ahogyan a lineáris kombináció esetén eljártunk, tekintsünk három különböző egyenletrendszert! Az első két egyenlethez hozzácsatoljuk a 4., az 5., illetve a 6. egyenletet. Ekkor a három homogén egyenletből álló egyenletrendszer együtthatómátrixa determinánsának eltűnéséből az következik, hogy fennállnak a (12)-vel analóg lineáris összefüggések:

$$\lambda_w \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \beta_{1w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \beta_{2w} \end{bmatrix}, \quad (w = x, y, z). \quad (17)$$

A (12) összefüggés miatt (17) csak úgy teljesülhet, ha

$$\lambda_w = \lambda = 1, \quad (w = x, y, z). \quad (18)$$

E szerint a két párhuzamos hatásvonal egybe kell, hogy essen.

A (10) egyenletrendszer (12) feltétel mellett a három erő esetét visszavezettük a két erő esetére.

A (13) összefüggés azt jelenti, hogy a három hatásvonal irányvektora egybeesik, maguk a hatásvonalak párhuzamosak. Ebből az is következik, hogy λ és μ csak egy lehet. A lineáris kombináció esetén alkalmazott fogás szerint tekintsünk három különböző egyenletrendszert! Az első két egyenlethez hozzácsatoljuk a 4., az 5., illetve a 6. egyenletet. Ekkor a három homogén egyenletből álló egyenletrendszer együtthatómátrixa determinánsának eltűnéséből az következik, hogy fennállnak a (13)-mal analóg lineáris összefüggések:

$$\lambda_w \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \beta_{1w} \end{bmatrix} = \mu_w \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \beta_{2w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \beta_{3w} \end{bmatrix}, \quad (w = x, y, z). \quad (19)$$



A (13) összefüggés miatt (19) csak úgy teljesülhet, ha

$$\lambda_w = \lambda = 1, \text{ és } \mu_w = \mu = 1, \quad (w = x, y, z). \quad (20)$$

E szerint a három erő hatásvonalának iránykoszinuszai és a nyomatékkkoordinátái azonosak, azaz a három erő hatásvonala egybeesik.

Mivel három erő hatásvonala párhuzamos, ezért már nem csak az oszlopok, hanem a sorok is azonosak. Tehát a

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} \\ \alpha_{1y} & \alpha_{2y} & \alpha_{3y} \\ \beta_{1w} & \beta_{2w} & \beta_{3w} \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

összefüggés akkor is fennáll, ha a nyomatékkkoordinátákra feltételeket nem rovunk ki. Ugyanakkor fenn kell még állnia a

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} \\ \beta_{1v} & \beta_{2v} & \beta_{3v} \\ \beta_{1w} & \beta_{2w} & \beta_{3w} \end{bmatrix} = 0, \quad (v \neq w, v = w = x, y, z), \quad \det \begin{bmatrix} \beta_{1x} & \beta_{2x} & \beta_{3x} \\ \beta_{1y} & \beta_{2y} & \beta_{3y} \\ \beta_{1z} & \beta_{2z} & \beta_{3z} \end{bmatrix} = 0 \quad (22)$$

összefüggéseknek is. Vagy azt tételezzük fel, hogy a nyomatékkkoordináták arányosak egymással, vagy azt, hogy az egyik sor nulla. Ez első eset azt jelenti, hogy az egyes szakaszoknak a koordinátarendszer kezdőpontjára vett nyomatékok hatásvonala egybeesik, csak a nagyságuk különbözik. Ez csak úgy áll fenn, ha a három hatásvonal egy síkban fekszik. Mivel az iránykoszinuszok megegyeznek, ezért a három hatásvonal egy síkban helyezkedik el és párhuzamos egymással. A második esetben a három hatásvonal áthalad egy koordinátavonalon. Az iránykoszinuszra vonatkozó állítás miatt a hatásvonalak párhuzamos kell, hogy legyenek. Tehát a három hatásvonal egy síkban fekszik és párhuzamosak egymással. A két feltétel ugyanarra a következményre vezet. Ez a feltétel azt mondja ki, hogy ha a koordinátavonalak egyike a párhuzamos irányába mutat, másika a hatásvonalakra merőleges metsző, harmadika a kettőre merőleges, akkor az első két nyomatékkkoordináta zérus, a harmadik nyomatékkkoordináták függetlenek egymástól. Ekkor viszont a (22) minkét determinánsában van egy-egy sor, ami zérus, így a két determináns valóban zérus.

A (10) egyenletrendszer (13) feltétel melletti vizsgálata azt mutatja, hogy három erő akkor van egyensúlyban, ha vagy a három erő hatásvonala egybeesik, vagy a három erő egy síkban van, hatásvonaluk párhuzamos, és az erők vektoriális összege zérus (síkbeli kiegyensúlyozott mérleget alkotnak).

Három erő esetén az egyensúly szükséges és elégséges feltétele két részre bontható: egyrészt előírja az erők egymáshoz viszonyított elhelyezkedését (a három hatásvonal egy síkban van, vagy egy pontban metszik egymást, vagy párhuzamosak), másrészt megadja, hogy a három erő vektoriális összege zérus. Az első feltétel adja meg a hatásvonalak elrendezései közül azokat,



amely esetén az egyes erőket saját hatásvonalán eltolva az egyensúly fennáll: a három hatásvonal egy síkban helyezkedik el és egy (végesben, vagy végtelenben fekvő) pontba metszi egymást.

A két erőhöz hasonlóan az egyensúlynak a hatásvonalak elrendezésére vonatkozó szükséges (de nem elégséges) feltétele meghatározható geometriai módszerrel is.

Vegyük az egyik erő e_1 hatásvonalának A pontján áthaló két olyan egyenest, amely a másik erő e_2 hatásvonalát C , illetve D pontban szeli! Ekkor az *Együvé tartozás tétele* értelmében a harmadik erő hatásvonalát benne kell, hogy fektüdjék az ACD síkban. Vegyük az e_1 hatásvonalon az A ponttól eltérő B pontot! Ekkor az *Együvé tartozás tétele* értelmében a harmadik erő hatásvonalát benne kell, hogy fektüdjék az BCD síkban is. Ez csak úgy lehetséges, ha a két sík egybeesik, azaz a három erő hatásvonalát egy síkban van. Tegyük fel, hogy van két olyan hatásvonal, amelyek metszik egymást! Ekkor véve egy, a metszésponton áthaladó, de az erők hatásvonalait tartalmazó síkra merőleges egyenest, arra nézve az *Együvé tartozás tétele* megköveteli, hogy a harmadik erő hatásvonalát is haladjon át ezen a metszésponton. Ellenkezőleg, legyen két olyan hatásvonal, amely nem metszi egymást, azaz párhuzamos! Ekkor az *Együvé tartozás tétele* megköveteli, hogy a harmadik erő hatásvonalát is legyen párhuzamos.

Az *Együvé tartozás tételével* a nyomatéki egyensúly teljesülését biztosítottuk. A vetületi egyenletek teljesüléséhez az erők hosszára vonatkozó feltételt kell kiróni. Hasonlóan a két erő esetéhez, kétféleképpen járhatunk el. Az egyik, hogy megköveteljük, hogy két, a három erő hatásvonalát tartalmazó síkra merőleges egyenesre vett nyomatéknak is legyen zérus az értéke. Ennek a következménye, hogy a három erő vektoriális összege zérus. A második, hogy eleve azt tételezzük fel – a (10) egyenletrendszer első három egyenlete alapján –, hogy a három erő vektoriális összege zérus.

6. Négy erő esete

Az egyensúly feltétele négy erő esetén a következő hat egyenlettel fejezhető ki:

$$\begin{aligned}\alpha_{1x}F_1 + \alpha_{2x}F_2 + \alpha_{3x}F_3 + \alpha_{4x}F_4 &= 0, \\ \alpha_{1y}F_1 + \alpha_{2y}F_2 + \alpha_{3y}F_3 + \alpha_{4y}F_4 &= 0, \\ \alpha_{1z}F_1 + \alpha_{2z}F_2 + \alpha_{3z}F_3 + \alpha_{4z}F_4 &= 0, \\ \beta_{1x}F_1 + \beta_{2x}F_2 + \beta_{3x}F_3 + \beta_{4x}F_4 &= 0, \\ \beta_{1y}F_1 + \beta_{2y}F_2 + \beta_{3y}F_3 + \beta_{4y}F_4 &= 0, \\ \beta_{1z}F_1 + \beta_{2z}F_2 + \beta_{3z}F_3 + \beta_{4z}F_4 &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

A homogén egyenletrendszer egyértelmű megoldásának feltétele, hogy a hat egyenletből ki lehessen választani négy egyenletet úgy, hogy az együtthatómátrixának determinánsa legyen zérus. Az (1) összefüggés alapján kizárhatjuk, hogy minden iránykoszinusz zérus legyen. Tekintsünk az első négy, illetve az első három és az ötödik, valamint az első három és a hatodik vonalkoordinátára vonatkozó egyenleteket. Ezek együtthatómátrixaira vonatkozó feltételek a következők:



$$\det \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} & \alpha_{4x} \\ \alpha_{1y} & \alpha_{2y} & \alpha_{3y} & \alpha_{4y} \\ \alpha_{1z} & \alpha_{2z} & \alpha_{3z} & \alpha_{4z} \\ \beta_{1w} & \beta_{2w} & \beta_{3w} & \beta_{4w} \end{bmatrix} = 0, \quad (w = x, y, z). \quad (24)$$

A determináns eltűnhet úgyis, hogy két oszlop azonos (vagy arányos), több oszlop azonos (vagy arányos), egy oszlop két, vagy három oszlop lineáris kombinációjaként állítható elő. Ha két oszlop arányos egymással, akkor az a két hatásvonal egybeesik, azaz három, kettő, vagy egy erőre vezetjük vissza a feladatot. Ha egy oszlop két másik oszlop lineáris kombinációjaként állítható elő, akkor az a három hatásvonal egy síkban van. Ekkor az *Együvé tartozás tétele* előírja, hogy a negyedik erő hatásvonala is fekszen benn abban a síkban. A determináns eltűnhet úgy is, hogy az első három sor elemei azonosak, azaz a hatásvonalak párhuzamosak. Ekkor a párhuzamos irányt, és rá merőleges két irányt véve koordinátavonalaknak, a nyomatékkordináták közül egy mindig zérus. Tehát (23) megoldásához vagy két vetületi és két nyomatéki, vagy egy vetületi és három nyomatéki egyenletet választunk. Az első esetben a két vetületi egyenlet együtthatói egyeznek meg. A második esetben a három nyomatéki egyenletben minden együttható zérus. Azaz a (23) egyenletrendszer determinánsa párhuzamos hatásvonalak esetén is eltűnik.

Tekintsük azt az esetet, amikor a negyedik hatásvonal első három és negyedik, illetve ötödik, valamint hatodik vonalkoordinátája az első három hatásvonal ugyanazon vonalkoordinátáinak valamely lineáris kombinációjaként állítható elő:

$$\lambda_w \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{1z} \\ \beta_{1w} \end{bmatrix} + \mu_w \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \alpha_{2z} \\ \beta_{2w} \end{bmatrix} + \nu_w \begin{bmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \alpha_{3z} \\ \beta_{3w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{4x} \\ \alpha_{4y} \\ \alpha_{4z} \\ \beta_{4w} \end{bmatrix} \quad (w = x, y, z). \quad (25)$$

Mivel az első három vonalkoordináta lineáris kombinációja (25), $w = x$ alapján rögzített, ezért a (25), $w = y$ alapján az ötödik, a (25), $w = z$ alapján a hatodik vonalkoordináta is azonos lineáris kombinációként kell előállnia. Tehát (25) összefüggésben felírt együtthatókra fennállnak a

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z \quad \text{és} \quad \mu_x = \mu_y = \mu_z \quad (26)$$

összefüggések. Ez azt jelenti, hogy a negyedik hatásvonal mind a hat vonalkoordinátája (iránykoszinuszai és a nyomatékkordinátái) a három másik hatásvonal vonalkoordinátájának lineáris kombinációja. Azaz a négy hatásvonal egy vonalfelületen helyezkedik el.

Megjegyzés. A korábbi érvelés szerint megpróbálhatnánk két + egy erőre alkalmazni az *Együvé tartozás tételét*, és első lépésben három erő hatásvonaláról igazolhatnánk, hogy azok egy síkba esnek, ezért a negyedik erő hatásvonalának is ebbe a síkba kellene esnie. Az valóban igaz, hogy, ha három erő hatásvonala egy síkba esik, akkor az egyensúly fennállásának szükséges feltétele, hogy a negyedik erő hatásvonala is essen bele abba a síkba. (Ez az *Együvé tartozás tétele* egy másik megfogalmazása, lásd Lámer 2014.) Ugyanakkor négy erő esetén csak két hatásvonalon áthaladó szelő az *Együvé tartozás tétele* alapján sem a harmadik, sem a negyedik hatásvonalra



nézve semmiféle megkötést nem ír elő. Gondoljunk két párhuzamos síkban lévő erőpárra, amelyek ugyan lehetnek egyensúlyban, de nem találunk olyan egyenest, amely négy, vagy akár csak három hatásvonalon áthaladna.

Tekintsünk négy erő hatásvonalát, amelyből hármon haladjon át egy szelő! Az *Együvé tartozás tétele* megköveteli, hogy a negyedik erő hatásvonala is haladjon át ezen a szelőn. Tekintsünk négy, egyensúlyi erőrendszert alkotó erő hatásvonalait! Ekkor az *Együvé tartozás tétele* értelmében, ha van olyan egyenes, amely három hatásvonalat a négyből szeli, akkor a negyediket is szeli. Vagyis, ha van három egyenesnek olyan elrendezése, hogy mindhármát szeli egy egyenes, akkor alkalmazhatjuk az *Együvé tartozás tételét*. Tehát három kitérő egyenes szelőinek mértani helyét kell megkeresni. Ismert, hogy ez a mértani hely az egyköpenyű hiperboloid, vagy egy hiperbolikus paraboloid (lásd pl. Appel pp. 159-163, Strommer pp. 639-649, Finnyikov pp. 15-16). (Ez a vonalfelület elfajulhat egy, vagy két síkká is, kúppá, netán egy, vagy két egyenessé, ezek áttekintését mellőzzük.)

Az *Együvé tartozás tételéből* következik, hogy ez a feltétel szükséges, de nem elégséges. Ugyanakkor megmutatható, hogy ha a négy erő vektoriális összege (ha úgy tetszik az eredő ereje) zérus, akkor a fenti feltétel nem csak szükséges, hanem elegendő is (lásd pl. Appell pp. 159-161). A négy erő vektoriális összegéről – a (23) egyenletrendszer első három egyenlete alapján – feltehetjük, hogy zérus. Legyen adott egy egyköpenyű hiperboloid négy, ugyanahhoz az alkotósereghez tartozó alkotója, e_i ($i = 1,2,3,4$)! Válasszunk a térben egy P pontot, és húzzunk a P ponton át a négy e_i ($i = 1,2,3,4$) alkotóval párhuzamos egyenest! Tekintsük adottnak az $\mathbf{F}_4$ erő nagyságát! Ekkor a P pontban az $\mathbf{F}_{4,P}$ erő felbontható az e_j ($j = 1,2,3$) egyenesekkel párhuzamos $\mathbf{F}_{1,P}$, $\mathbf{F}_{2,P}$, és $\mathbf{F}_{3,P}$ összetevőkre. Ekkor az így nyert $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}_P$ erőrendszer egyensúlyi: mind az eredő ereje, mind az eredő nyomatéka zérus. Toljuk el az $\mathbf{F}_{1,P}$, $\mathbf{F}_{2,P}$, $\mathbf{F}_{3,P}$ és $\mathbf{F}_{4,P}$ erőket önmagukkal párhuzamosan úgy, hogy az erők az egyköpenyű hiperboloidon fekvő e_i ($i = 1,2,3,4$) alkotókra (hatásvonalakra) essenek. Az így nyert $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}$ erőrendszer szintén egyensúlyi: az $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ és $\mathbf{F}_4$ erők eredő ereje a szerkesztésből adódóan zérus, az eredő nyomatékuk pedig merőleges kell, hogy legyen az egyköpenyű hiperboloidnak a „másik”, az e_i ($i = 1,2,3,4$) alkotót nem tartalmazó alkotósereg minden elemére. Ez csak úgy lehetséges, ha az eredő nyomaték zérus. Tehát az erők nem csak a P pontban, hanem az egyköpenyű paraboloid alkotóin hatva is egyensúlyban vannak.

A fenti érvelés hiperbolikus paraboloid esetén nem állja meg a helyét, két okból sem. Ugyanis az egy alkotósereghez tartozó alkotók párhuzamosak egy síkkal, ezért egyrészt nem lehet egy erőt három, egy síkba eső alkotó irányába eső komponensre egyértelműen felbontani, másrészt az alkotók egy síkkal párhuzamosok, ezért az alkotókra merőleges nyomatékok végül is adhatnak zérustól eltérő nyomatékot is. Ezért legyen adott egy hiperbolikus paraboloid négy, ugyanahhoz az alkotósereghez tartozó alkotója, e_i ($i = 1,2,3,4$). Válasszunk a négy hatásvonalból hármat, e_j ($j = 1,2,3$), és a fentebb, az egyköpenyű hiperboloid esetén leírt eljárás segítségével határozzunk meg három erőt, $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$, amelyek eredő ereje zérus, eredő nyomatéka $\mathbf{M}_G$. Ez utóbbi merőleges a hiperbolikus paraboloid „másik” alkotó seregére, a „másik” irány síkjára. Ezt követően válasszunk



a négy hatásvonalból másik hármat, e_k ($k = 1,2,4$), hasonlóan az imént mondottakhoz, határozzunk meg három erőt, $\{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_4\}$, amelyek eredő ereje zérus, eredő nyomatéka $\mathbf{M}_H$. Ez utóbbi is merőleges a hiperbolikus paraboloid „másik” alkotó seregére, azaz iránya egybeesik $\mathbf{M}_G$ -vel. A fentebb bevezetett erők segítségével, azaz lineáris kombinációjukkal, meghatározható négy erő:

$$\mathbf{F}_1 = \lambda \mathbf{G}_1 + \mu \mathbf{H}_1; \mathbf{F}_2 = \lambda \mathbf{G}_2 + \mu \mathbf{H}_2; \mathbf{F}_3 = \lambda \mathbf{G}_3; \mathbf{F}_4 = \mu \mathbf{H}_4. \quad (27)$$

A négy erő, $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}$, eredő ereje zérus, eredő nyomatéka pedig

$$\mathbf{M} = \lambda \mathbf{M}_G + \mu \mathbf{M}_H. \quad (28)$$

Mivel a két együttható, λ és μ , választható úgy, hogy az eredő nyomaték legyen zérus, ezért a (27) alatt adott négy erő egyensúlyban van nem csak a P pontban, hanem a hiperbolikus paraboloid alkotóin hatva is.

Négy erő esetén az egyensúly szükséges és elégséges feltételei, hasonlóan a legfeljebb három erőt számláló erőrendszerekhez két részre bontható. Az egyik, hogy megköveteljük, hogy a négy erő hatásvonala egy vonalfelület, nevezetesen vagy egy egyköpenyű hiperboloid, vagy egy hiperbolikus paraboloid egyik alkotó seregéhez tartozzanak, a másik hogy megköveteljük, hogy a négy erő vektoriális összege legyen zérus. Mind a két feltételcsoportot magába foglalja a (23) egyenletrendszer. A geometriai módszerekkel csak a hatásvonalak elhelyezkedésének feltétele határozható meg.

Megjegyzés. Itt csak a legáltalánosabb, a kitérő egyenesek esetét vizsgáltuk. Hasonlóképpen vizsgálható az egy síkba eső, a párhuzamos, vagy a centrális hatásvonalak esete is.

7. Öt erő esete

Az egyensúly feltételét öt erő esetén a következő hat egyenlettel adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \alpha_{1x}F_1 + \alpha_{2x}F_2 + \alpha_{3x}F_3 + \alpha_{4x}F_4 + \alpha_{5x}F_5 &= 0, \\ \alpha_{1y}F_1 + \alpha_{2y}F_2 + \alpha_{3y}F_3 + \alpha_{4y}F_4 + \alpha_{5y}F_5 &= 0, \\ \alpha_{1z}F_1 + \alpha_{2z}F_2 + \alpha_{3z}F_3 + \alpha_{4z}F_4 + \alpha_{5z}F_5 &= 0, \\ \beta_{1x}F_1 + \beta_{2x}F_2 + \beta_{3x}F_3 + \beta_{4x}F_4 + \beta_{5x}F_5 &= 0, \\ \beta_{1y}F_1 + \beta_{2y}F_2 + \beta_{3y}F_3 + \beta_{4y}F_4 + \beta_{5y}F_5 &= 0, \\ \beta_{1z}F_1 + \beta_{2z}F_2 + \beta_{3z}F_3 + \beta_{4z}F_4 + \beta_{5z}F_5 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

A homogén egyenletrendszer egyértelmű megoldásának feltétele, hogy a hat egyenletből bárhogy kiválasztott öt egyenlet együtthatómátrixának determinánsa legyen zérus.

A lehetséges eseteket négy erő eseténél már áttekintettük. Ezek a következők. Két oszlop arányos: két hatásvonal egybeesik, visszavezetjük négy erő esetére. Több oszlop arányos, vagy kettesével arányosak: több hatásvonal esik egybe, vagy két-két hatásvonal esik egybe; ötnél kevesebb erő esetére vezetjük vissza. Egy, két vagy három oszlop két oszlop lineáris

kombinációjaként állítható elő. Az erőkből három, négy vagy öt egy síkban helyezkedik el. Az első eset négy erőre vezethető vissza, a második, felhasználva az *Együvé tartozás tételét*, a harmadik esetben annak értelmezéséből adódóan az egy síkban elhelyezkedő hatásvonalakat öleli fel. A legelsőt már tárgyaltuk, az egy síkban lévő hatásvonalak még további vizsgálatot igényelnek, hogy az egyensúly fennállásának feltételei rögzíthetők legyenek, de ez már nem a hatásvonalaknak legáltalánosabb elhelyezkedése. Ezért visszatérünk a hatásvonalak legáltalánosabb elrendezéséhez, amikor egy oszlop a többi oszlop lineáris kombinációjaként áll elő.

Tekintsünk pl. az első öt, illetve az első négy és a hatodik vonalkoordinátára vonatkozó egyenleteket. Ezek együtthatómátrixaira vonatkozó feltételek a következők:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} & \alpha_{4x} & \alpha_{5x} \\ \alpha_{1y} & \alpha_{2y} & \alpha_{3y} & \alpha_{4y} & \alpha_{5y} \\ \alpha_{1z} & \alpha_{2z} & \alpha_{3z} & \alpha_{4z} & \alpha_{5z} \\ \beta_{1x} & \beta_{2x} & \beta_{3x} & \beta_{4x} & \beta_{5x} \\ \beta_{1y} & \beta_{2y} & \beta_{3y} & \beta_{4y} & \beta_{5y} \end{bmatrix} = 0, \quad \det \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} & \alpha_{4x} & \alpha_{5x} \\ \alpha_{1y} & \alpha_{2y} & \alpha_{3y} & \alpha_{4y} & \alpha_{5y} \\ \alpha_{1z} & \alpha_{2z} & \alpha_{3z} & \alpha_{4z} & \alpha_{5z} \\ \beta_{1x} & \beta_{2x} & \beta_{3x} & \beta_{4x} & \beta_{5x} \\ \beta_{1z} & \beta_{2z} & \beta_{3z} & \beta_{4z} & \beta_{5z} \end{bmatrix} = 0. \quad (30)$$

Ha kizárjuk, hogy minden iránykoszinusz zérus legyen (ezt (1) alapján megtehetjük), úgy egy nem zérus együtthatójú ötödrendű mátrix determinánsa akkor lesz zérus, ha a mátrix egyik oszlopa a másik négy oszlopával lineárisan összefügg, például:

$$\lambda_w \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{1z} \\ \beta_{1x} \\ \beta_{1w} \end{bmatrix} + \mu_w \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \alpha_{2z} \\ \beta_{2x} \\ \beta_{2w} \end{bmatrix} + \nu_w \begin{bmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \alpha_{3z} \\ \beta_{3x} \\ \beta_{3w} \end{bmatrix} + o_w \begin{bmatrix} \alpha_{4x} \\ \alpha_{4y} \\ \alpha_{4z} \\ \beta_{4x} \\ \beta_{4w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{5x} \\ \alpha_{5y} \\ \alpha_{5z} \\ \beta_{5x} \\ \beta_{5w} \end{bmatrix} \quad (w = y, z). \quad (31)$$

Mivel az első négy vonalkoordináta lineáris kombinációja (31), $w = y$ alapján rögzített, ezért a (31), $w = z$ alapján a hatodik vonalkoordináta is azonos lineáris kombinációként kell előállnia. Tehát (31) összefüggésben felírt együtthatókra fennállnak a

$$\lambda_y = \lambda_z \quad \text{és} \quad \mu_y = \mu_z \quad (32)$$

összefüggések. Ez azt jelenti, hogy az ötödik hatásvonal mind a hat vonalkoordinátája (iránykoszinuszai és a nyomatékkordinátái) a négy másik hatásvonal vonalkoordinátájának lineáris kombinációja. Azaz az öt hatásvonal egy lineáris kongruenciát alkot.

Tekintsünk öt erő hatásvonalát, amelyből négyen haladjon át egy szelő! Az *Együvé tartozás tétele* megköveteli, hogy az ötödik erő hatásvonala is haladjon át ezen a szelőn. Öt, egyensúlyi erőrendszert alkotó erők hatásvonalai legáltalánosabb formában úgy helyezkednek el, hogy ha van olyan egyenes, amely négy hatásvonalat szeli, akkor az ötödiket is szeli. Magyarán keressük négy kitérő egyenes szelőinek mértani helyét. Ismert, hogy azok az egyenesek, amelyek között két lineáris feltétel fogalmazható meg, egy lineáris kongruenciához tartoznak (lásd pl. Appell pp.



161, Finnyikov pp. 15-16). Az, hogy a hatásvonalak egy lineáris kongruenciához tartoznak, az egyensúly szükséges feltétele, de nem elégséges. Megmutatható, hogy ha az öt erő vektoriális összege zérus, akkor a fenti feltétel nem csak szükséges, hanem elegendő is (lásd pl. Appell pp. 162). Az öt erő vektoriális összegéről – a (29) egyenletrendszer első három egyenlete alapján – feltehetjük, hogy zérus. Továbbá, az ötből négy hatásvonal különböző elrendezése mellett található két egyenes, amely mind a négy hatásvonalon áthalad. Tekintsük ugyanis három hatásvonalat! Ezek rajta fekszenek egy vonalfelületen (egyköpenyű hiperboloid, illetve hiperbolikus paraboloid). A negyedik hatásvonal metszi ezt a vonalfelületet két valós, vagy képzetes pontban, P_1 és P_2 . Tekintsük az első három hatásvonal kifeszítette vonalfelület „második” alkotóseregének azt a két f_1 és f_2 egyenesét, amelyek áthaladnak a P_1 , illetve a P_2 pontokon! Ez a két egyenes áthalad az első négy erő hatásvonalán.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha az öt erő vektoriális összege zérus, akkor a térben elhelyezkedő öt erő egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele, hogy az öt erő hatásvonala tartozzon egy lineáris kongruenciához. Legyen adott egy lineáris kongruenciához tartozó, a kongruenciát megadó két f_1 és f_2 egyenest metsző öt egyenes, e_i ($i = 1,2,3,4,5$)! Válasszunk a térben egy P pontot, és húzzunk a P ponton át a négy e_i ($i = 1,2,3,4$) alkotóval párhuzamos egyenest! A fentebb, az egyköpenyű hiperboloid esetén leírt eljárás segítségével határozzunk meg négy erőt, $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4\}$, amelyek eredő ereje zérus, eredő nyomatéka $\mathbf{M}_G$. Ez utóbbi merőleges mind az f_1 , mind az f_2 egyenesre, hiszen mindkettőn áthalad a négy erő hatásvonala. Ez csak úgy lehetséges, ha a nyomaték hatásvonala egybeesik a két kitérő egyenes merőleges szelőjével. Ezt követően válasszunk az öt hatásvonalból másik négyet, e_i ($i = 1,2,3,5$), hasonlóan az imént mondottakhoz, határozzunk meg négy erőt, $\{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_5\}$, amelyek eredő ereje zérus, eredő nyomatéka $\mathbf{M}_H$. Ez utóbbi, mint vektor, a fentebb ismertetett okok miatt, szintén az f_1 és az f_2 egyenesek merőleges szelőjébe esik, azaz iránya egybeesik $\mathbf{M}_G$ -vel. A fentebb bevezetett erők lineáris kombinációjával meghatározható öt erő:

$$\mathbf{F}_1 = \lambda \mathbf{G}_1 + \mu \mathbf{H}_1; \mathbf{F}_2 = \lambda \mathbf{G}_2 + \mu \mathbf{H}_2; \mathbf{F}_3 = \lambda \mathbf{G}_3 + \mu \mathbf{H}_3; \mathbf{F}_4 = \lambda \mathbf{G}_4; \mathbf{F}_5 = \mu \mathbf{H}_5. \quad (33)$$

Az öt erő, $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5\}$, eredő ereje zérus, eredő nyomatéka pedig

$$\mathbf{M} = \lambda \mathbf{M}_G + \mu \mathbf{M}_H. \quad (34)$$

Mivel a két együttható, λ és μ , választható úgy, hogy az eredő nyomaték legyen zérus, ezért a (33) alatt adott öt erő egyensúlyban van.

Hasonlóan a korábban tárgyalt esetekhez az egyensúly szükséges és elégséges feltételei két részre bonthatók: egy a hatásvonalak elrendezésére – a hatásvonalak egy lineáris kongruenciához tartoznak –, és egy az erők vektoriális összegére vonatkozik. Mind a két feltételcsoportot magába foglalja a (29) egyenletrendszer. A geometriai módszerrel csak a hatásvonalak elhelyezkedésének feltétele határozható meg.

8. Hat erő esete

Az egyensúly feltételét hat erő esetén a következő hat egyenlettel írjuk le:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1x}F_1 + \alpha_{2x}F_2 + \alpha_{3x}F_3 + \alpha_{4x}F_4 + \alpha_{5x}F_5 + \alpha_{6x}F_6 &= 0, \\
 \alpha_{1y}F_1 + \alpha_{2y}F_2 + \alpha_{3y}F_3 + \alpha_{4y}F_4 + \alpha_{5y}F_5 + \alpha_{6y}F_6 &= 0, \\
 \alpha_{1z}F_1 + \alpha_{2z}F_2 + \alpha_{3z}F_3 + \alpha_{4z}F_4 + \alpha_{5z}F_5 + \alpha_{6z}F_6 &= 0, \\
 \beta_{1x}F_1 + \beta_{2x}F_2 + \beta_{3x}F_3 + \beta_{4x}F_4 + \beta_{5x}F_5 + \beta_{6x}F_6 &= 0, \\
 \beta_{1y}F_1 + \beta_{2y}F_2 + \beta_{3y}F_3 + \beta_{4y}F_4 + \beta_{5y}F_5 + \beta_{6y}F_6 &= 0, \\
 \beta_{1z}F_1 + \beta_{2z}F_2 + \beta_{3z}F_3 + \beta_{4z}F_4 + \beta_{5z}F_5 + \beta_{6z}F_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

A homogén egyenletrendszer egyértelmű megoldásának feltétele, hogy a hat egyenlet együtthatómátrixának determinánsa legyen zérus:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} & \alpha_{4x} & \alpha_{5x} & \alpha_{6x} \\ \alpha_{1y} & \alpha_{2y} & \alpha_{3y} & \alpha_{4y} & \alpha_{5y} & \alpha_{6y} \\ \alpha_{1z} & \alpha_{2z} & \alpha_{3z} & \alpha_{4z} & \alpha_{5z} & \alpha_{6z} \\ \beta_{1x} & \beta_{2x} & \beta_{3x} & \beta_{4x} & \beta_{5x} & \beta_{6x} \\ \beta_{1y} & \beta_{2y} & \beta_{3y} & \beta_{4y} & \beta_{5y} & \beta_{6y} \\ \beta_{1z} & \beta_{2z} & \beta_{3z} & \beta_{4z} & \beta_{5z} & \beta_{6z} \end{bmatrix} = 0. \tag{36}$$

Amennyiben kizárjuk, hogy minden iránykoszinusz zérus legyen (ez (1) alapján megtehető), úgy egy nem zérus együtthatójú hatodrendű mátrix determinánsa akkor lesz zérus, ha a mátrix egyik oszlopa a másik öt oszlopával lineárisan összefügg, azaz pl. a hatodik oszlop az első öt lineáris kombinációjaként előállítható:

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{1z} \\ \beta_{1x} \\ \beta_{1y} \\ \beta_{1z} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \alpha_{2x} \\ \alpha_{2y} \\ \alpha_{2z} \\ \beta_{2x} \\ \beta_{2y} \\ \beta_{2z} \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} \alpha_{3x} \\ \alpha_{3y} \\ \alpha_{3z} \\ \beta_{3x} \\ \beta_{3y} \\ \beta_{3z} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \alpha_{4x} \\ \alpha_{4y} \\ \alpha_{4z} \\ \beta_{4x} \\ \beta_{4y} \\ \beta_{4z} \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} \alpha_{5x} \\ \alpha_{5y} \\ \alpha_{5z} \\ \beta_{5x} \\ \beta_{5y} \\ \beta_{5z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{6x} \\ \alpha_{6y} \\ \alpha_{6z} \\ \beta_{6x} \\ \beta_{6y} \\ \beta_{6z} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Ez azt jelenti, hogy a hatodik hatásvonal hat Plücker-féle koordinátája az öt másik hatásvonal Plücker-féle koordinátája lineáris kombinációja. Azaz a hat hatásvonal ugyanazon lineáris komplexushoz tartozik.

Megjegyzés. A legáltalánosabb eset mellett fennállhat, hogy egy, két vagy több hatásvonal egybeesik, a hatásvonalak egy, két vagy három síkhoz tartoznak, a hatásvonalak centrálisak, vagy párhuzamosak stb. Ekkor részben visszajutunk a hatnál kevesebb számú erő esetéhez, részben a hatásvonalak olyan egyedi elrendezéséhez jutunk, amelyek az egyensúlyi egyenletek nem triviális megoldásait szolgáltatják. Ezek vizsgálatát mellőzzük.



Legáltalánosabb esetnek azt tekintjük, amikor a hat erő hatásvonalából ötön áthalad egy szelő. Az *Együvé tartozás tétele* megköveteli, hogy a hatodik erő hatásvonalja is haladjon át ezen a szelőn. Ismert, hogy azok az egyenesek, amelyek között egy lineáris feltétel fogalmazható meg, egy lineáris komplexushoz tartoznak (lásd pl. Appell pp. 162, Strommer pp. 374-376, Finnyikov pp. 15-16). Az nyilvánvaló, hogy ez a feltétel az egyensúly egyik szükséges feltétele, de nem elégséges. Lentebb megmutatjuk, hogy ha a hat erő vektoriális összege zérus, akkor a fenti feltétel nem csak szükséges, hanem elegendő is.

Legyen adott egy f egyenes, amely metszi mind a hat e_i ($i = 1,2,3,4,5,6$) hatásvonalat! Válasszunk a térben egy P pontot, és húzzunk a P ponton át a négy e_j ($j = 1,2,3,4$) alkotóval párhuzamos egyenest! A fentebb, az egyköpenyű hiperboloid esetén leírt eljárás segítségével határozzunk meg négy erőt, $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4\}$, amelyek eredő ereje zérus, eredő nyomatéka $\mathbf{M}_G$. Ez utóbbi merőleges az f egyenesre, hiszen áthalad rajta a négy erő hatásvonalja. Ezt követően válasszuk a hat hatásvonalból másik négyet, e_k ($k = 1,2,3,5$), hasonlóan az imént mondottakhoz, határozzuk meg azt a négy erőt, $\{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_5\}$, amelyek eredő ereje zérus, eredő nyomatéka $\mathbf{M}_H$. Ez utóbbi, mint vektor, a fentebb ismertett okok miatt, szintén az f egyenesre merőleges. Végezetül tekintsük a hat hatásvonalból egy harmadik négyet, e_l ($l = 1,2,3,6$), hasonlóan az imént mondottakhoz, határozzuk meg azt a négy erőt, $\{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_6\}$, amelyek eredő ereje zérus, eredő nyomatéka $\mathbf{M}_I$, ez is merőleges az f egyenesre. A fentebb bevezetett erők segítségével, azok lineáris kombinációjával meghatározható hat erő:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \lambda \mathbf{G}_1 + \mu \mathbf{H}_1 + \nu \mathbf{I}_1; & \mathbf{F}_2 &= \lambda \mathbf{G}_2 + \mu \mathbf{H}_2 + \nu \mathbf{I}_2; \\ \mathbf{F}_3 &= \lambda \mathbf{G}_3 + \mu \mathbf{H}_3 + \nu \mathbf{I}_3; & \mathbf{F}_4 &= \lambda \mathbf{G}_4; & \mathbf{F}_5 &= \mu \mathbf{H}_5; & \mathbf{F}_6 &= \nu \mathbf{I}_6. \end{aligned} \quad (38)$$

A hat erő, $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5, \mathbf{F}_6\}$, eredő ereje zérus, eredő nyomatéka pedig

$$\mathbf{M} = \lambda \mathbf{M}_G + \mu \mathbf{M}_H + \nu \mathbf{M}_I. \quad (39)$$

A három nyomaték merőleges az f egyenesre, tehát egy síkban vannak. Tehát a három együttható, λ , μ és ν , választható úgy, hogy az eredő nyomaték zérus legyen, ezért a (38) alatt adott hat erő egyensúlyban van.

A korábban tárgyalt esetekhez hasonlatosan az egyensúly szükséges és elégséges feltételei két részre bonthatók: egy a hatásvonalak elrendezésére – a hatásvonalak egy lineáris komplexushoz tartoznak –, és egy az erők vektoriális összegére vonatkozik. Mind a két feltételcsoportot magába foglalja a (35) egyenletrendszer. A geometriai módszerekkel csak a hatásvonalak elhelyezkedésének feltétele határozható meg.

4. Összefoglalás

Legfeljebb hat erőt magába foglaló erőrendszer egyensúlyának feltételei két részre bonthatók. Az egyik feltétel, hogy az erők vektoriális összege zérus. A másik feltétel geometriai tartalommal bír, és az erők hatásvonalainak egymáshoz viszonyított helyzetére vonatkozik. A két feltétel kü-



lön-külön szükséges, együtt szükséges és elégséges. Az első feltételcsoport a vetületi egyensúlyi egyenleteknek felel meg, a második csoport a nyomatéki egyensúlyi egyenleteknek felel meg.

Az erők hatásvonalainak egymáshoz viszonyított helyzetére vonatkozó feltételek az alábbi geometriai formában fogalmazhatók meg.

Egy erő: a hatásvonal egy pontba elfajul.

Kettő erő: a hatásvonalak egy egyenesbe esnek.

Három erő: a hatásvonalak egy síkba esnek.

Négy erő: a hatásvonalak egy vonalfelületbe esnek, egy egyköpenyű hiperboloid, vagy egy hiperbolikus paraboloid ugyanahhoz az alkotóseregéhez tartoznak.

Öt erő: a hatásvonalak egy lineáris kongruenciához tartoznak.

Hat erő: a hatásvonalak egy lineáris komplexushoz tartoznak.

Irodalom

- [1] P. Appell, *Treaté du mécanique rationnelle*, T. I. 6. édition, Guther-Villars, Paris, 1941, pp. 635.
- [2] С. П. Финников, *Теория конгруенций*. ГИТТЛ, Москва – Ленинград, 1950.
- [3] G. Lámer, *Az egyensúly egyedi feltételei néhány erő esetén*. In: Műszaki Tudomány az Észak-kelet Magyarországi Régióban 2012. (Szolnok, 2012. május hó 10.): Szerk.: Pokorádi László, Debreceni Akadémia Bizottság Műszaki Szakbizottsága, Szolnok 2012. pp. 383-392
- [4] G. Lámer, *Az erők egyensúlyának egyedi feltételei centrális, párhuzamos, láncolt és kitérő erők esetén*. In: Műszaki Tudomány az Észak-kelet Magyarországi régióban 2014. május hó 13. Konferencia kiadványa. Szerk.: Pokorádi László. Debreceni Akadémia Bizottság Műszaki Szakbizottsága, Debrecen, 2014. pp. 294-312
- [5] T. Chelnoky, *Mechanika I. kötet. Statika*. Harmadik, átdolgozott kiadás. Budapest, Tankönyvkiadó, 1969
- [6] Gy. Strommer, *Geometria*. Budapest, Tankönyvkiadó, 1988.



Fogalomképzetek és definíciók a függvényről

SZANYI GY.

University of Debrecen, szanyi.gyongyi@science.unideb.hu

Abstract. Function is a basic concept of mathematics, in particular, mathematical analysis. With an appropriate development of a function approach, it becomes possible for students to use function models to describe mathematical and non-mathematical problems. This study examined some aspects of the images and definitions that first-year electrical engineering students have for the concept of function. The investigations were based on the research methods of Vinner and Dreyfus [4].

Bevezetés

A matematika a műszaki felsőoktatás célját tekintve alapozó tárgy. A matematika nyújtja – fogalmaival, tételeivel, eljárásaival, jelölésrendszerével – azokat az ismereteket, amelyekkel a mérnöki berendezések működését meghatározó törvények leírhatók [2].

Az elsőéves villamosmérnök hallgatók esetében a Matematika 1 tárgy tematikájának jelentős része a függvény fogalmához kapcsolódik. Ezért még mielőtt a függvények bevezetése megtörtént volna az említett tárgy előadásán vizsgáltam a hallgatók elképzeléseit a függvény fogalmáról Vinner és Dreyfus [4] kutatásai alapján. Jelen tanulmányban ismertetem a vizsgálatom eredményeit.

1. Elméleti háttér

Vinner [3] tanulmányában felhívja a figyelmet a fogalom definíció (concept definition) és a fogalomképzet (concept image) közötti különbségre. Véleménye szerint a fogalomképzet az a mentális kép, melyet az ember a fogalom neve hallatán generál azokkal a tulajdonságokkal együtt, mely a fogalmat jellemzik. Ezen mentális kép alatt különféle reprezentációkat értünk úgy mint, kép, szimbolikus forma, diagram, grafikon, stb. A fogalomképzet egyfajta tapasztalati eredmény a fogalmat megjelenítő példák hatására. A fogalom definíciót egy matematikai fogalom meghatározására használják.

Vinner és Dreyfus [4] két izraeli főiskola első éves, különböző szakirányon tanuló hallgatóinál és néhány középiskolai, nem matematika szakon végzett tanárnál vizsgálták a hallgatók függvény fogalmáról alkotott képeit és e fogalomra adott definícióit.

A függvényhez kötődő fogalomképzet (concept image) vizsgálatára kitűzött kérdésekre adott válaszokat elemezve Vinner és Dreyfus a következő aspektusokat különítette el:



- *Egyértelműség* – ha a hozzárendelési szabály az alaphalmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendel, akkor ez függvény. Ha nem, akkor nem függvény.
- *Folytonosság* – ha a grafikon megszakad, a megfeleltetés nem folytonos az alaphalmaz egy pontjában.
- *Felosztott alaphalmaz* – az alaphalmaznak két részhalmaza van, melyek mindegyikéhez különböző hozzárendelési szabály tartozik. Ennek következtében a grafikon jellege megváltozik.
- *Rendkívüli pont* – van egy pont, melyre az általános hozzárendelési szabály nem érvényes.

A felmérés résztvevői sok esetben ezen aspektusok valamelyike alapján állapították meg egy konkrét hozzárendelésről, hogy függvény e vagy sem.

A hallgatók függvény fogalmára adott definícióit (concept definition) a következő 6 kategóriába sorolták:

1. *Megfeleltetés* – a függvény két halmaz közötti olyan megfeleltetés, mely az egyik halmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendel a másik halmazból (Dirichlet-Bourbaki definíció).
2. *Függőségi viszony* – két változó közötti függés (y függ az x -től).
3. *Szabály* – a függvény egy szabály. A szabálynál várhatóan van bizonyos rendszeresség, míg a megfeleltetés „tetszőleges” is lehet.
4. *Művelet* – a függvény egy művelet.
5. *Képlet* – a függvény egy képlet, algebrai kifejezés vagy egy egyenlet.
6. *Reprezentáció* – a függvényt azonosítják egy grafikus vagy szimbolikus reprezentációjával.

Felhasználva a fentebb leírt kutatási módszereket és eredményeket ugyanilyen felmérés keretén belül vizsgáltam a villamosmérnök képzésbe bekerülő hallgatók függvény fogalmáról kialakult képeit és arra adott definícióit.

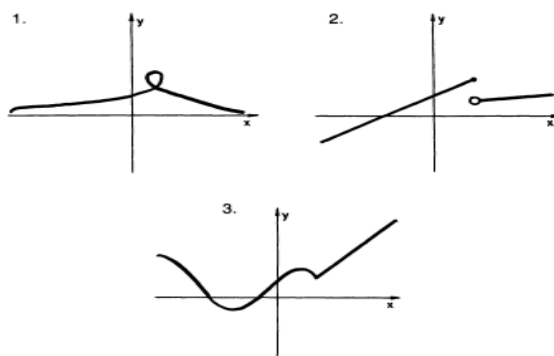
2. A kutatás módszertana

2.1. A kutatás résztvevői és körülményei

A felmérésben 34 elsőéves villamosmérnök hallgató vett részt. A felmérésre 2014 októberében került sor a függvények tárgyalását megelőzően. A kérdésekre írásban kellett válaszolni és erre a hallgatóknak 20 perc állt rendelkezésére.

2.2. A felmérésben szereplő kérdések

1. Létezik-e olyan függvény, melynek grafikonja:



Válaszodat indokold!

2. Létezik-e olyan függvény, mely minden nullától különböző számhoz annak a négyzetét rendeli, a nullához pedig az 1-et? Válaszodat indokold!

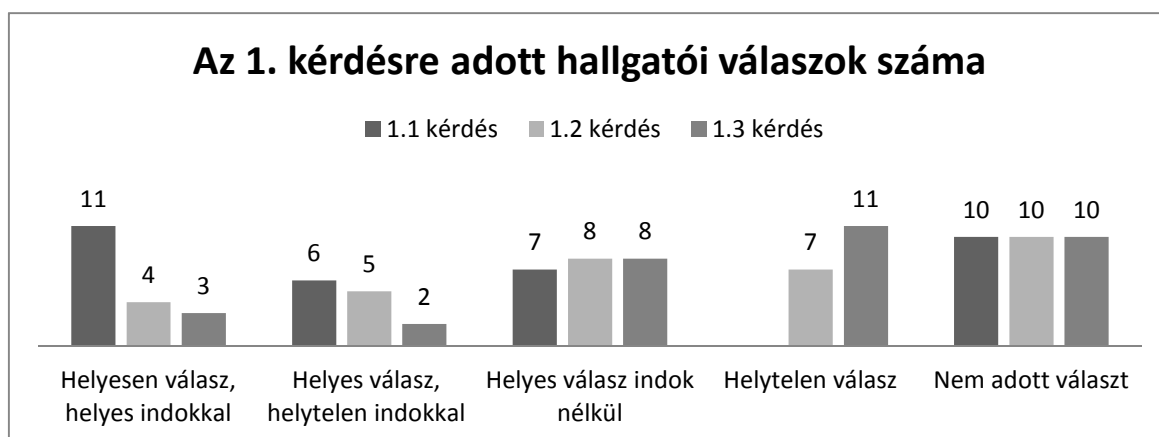
3. Létezik-e olyan függvény, melynek minden értéke egyenlő egymással? Válaszodat indokold!

4. Véleményed szerint mi a függvény?

Az első három kérdés célja az volt, hogy megvizsgálja a válaszadók függvényképzetének (function image) néhány aspektusát, a 4. kérdésre pedig a hallgatók függvény definíciójának vizsgálata volt. A definíciók a hallgatók középiskolai tanulmányaik során szerzett tapasztalatain alapulhattak, melyet a függvény fogalmával kapcsolatos példákkal és ellenpéldákkal szereztek.

3. Eredmények

Az 1.1-1.3 kérdésekre *Igen*-nel vagy *Nem*-mel kellett válaszolni indokolva azt. A kérdések elemzésénél kissé eltértem a már említett tanulmányban leírtaktól. A hallgatói válaszokat az 1. ábrán látható szempontok szerint elemeztem.

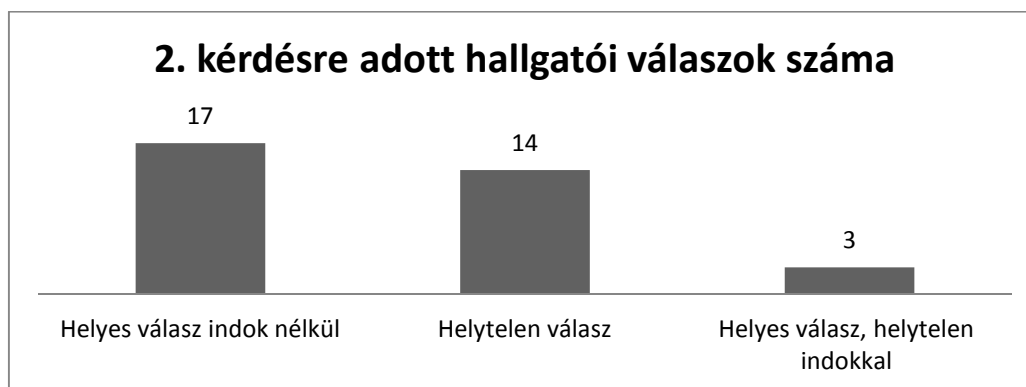


1. ábra



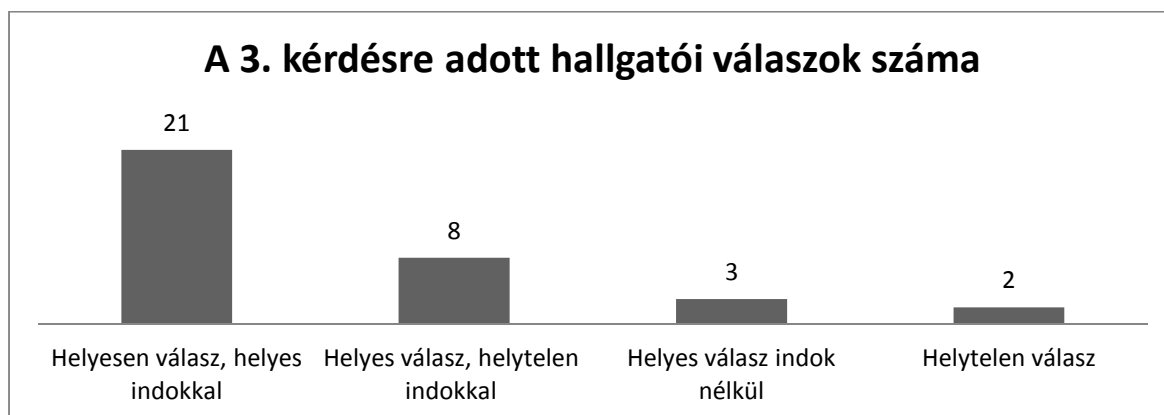
Az ábráról leolvasható, hogy az 1.1. kérdésre érkezett a legtöbb helyes válasz helyes indokkal (11). Ezek az indokok a fentebb leírt aspektusok közül az elsőhöz (egyértelműség) tartoztak. A számadatok igazolják, hogy válaszadó hallgató közül senki sem adott erre a kérdésre helytelen választ. Az 1.2 kérdés esetében a 4 helyes választ adó hallgató magyarázatában a folytonosság, az 1.3. kérdésnél (3 hallgató) a felosztott alaphalmaz aspektusok jelentek meg. Az 1.3. kérdésre érkezett a legtöbb helytelen válasz. Az 1.2. kérdésnél sok hallgatóban valószínűleg zavart okozhatott a szakadási pont megléte, az 1.3. kérdésben pedig az alaphalmaz különböző részhalmazaihoz tartozó hozzárendelési szabályok szerint megrajzolt függvénygrafikon.

A 2. kérdés esetében 14 hallgató válasza a *Nem* volt, 17-en mondták azt, hogy „Igen, létezik”, de nem indokolták válaszukat. Ezen válaszok aránya megegyezik Vinner és Dreyfus eredményeivel is. Az általuk vizsgált hallgatók 55%-a adott ugyanilyen választ erre a kérdésre. 3 hallgató adott helyes választ, de helytelen indokkal és helyes választ helyes indokkal egyetlen hallgató sem (2. ábra). A 3 említett hallgató a következő választ adta: „Létezik. Az $y=x^2+1$ függvény”. Ez a válasz az említett tanulmányban az erre a kérdésre adott helytelen válaszok között is megtalálható volt.



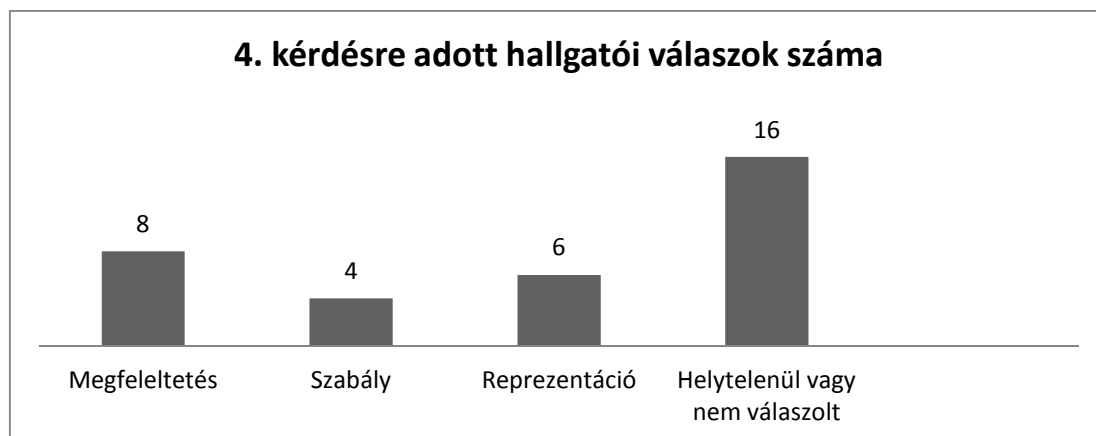
2. ábra

A 3. kérdésre viszont csak 2 hallgató adott nemleges választ, 21 hallgató adott helyes választ helyes indokkal és 3-an helyes választ adtak ugyan, de nem indokolták azt. 8-an helyesen válaszoltak, de rossz indokkal (3. ábra). Az ő esetükben a válasz a következő volt: „Létezik, az $y=x$ függvény”. Ezek a válaszok ugyancsak jellegzetes helytelen válaszai voltak a korábbi tanulmány ezen kérdésének.



3. ábra

A függvény definíciójára adott hallgatói válaszok besorolhatók voltak Vinner és Dreyfus által megadott kategóriákba. A 34 hallgatóból a 4. kérdésre 16 helytelenül vagy egyáltalán nem válaszolt, a helyes válaszadók közül 8 hallgató a függvényt mint megfeleltetést, 6 hallgató mint reprezentációt definiálta, 4 hallgató szerint pedig a függvény egy szabály (4. ábra).



4. ábra

3 hallgató 1.1-1.3 kérdések valamelyikére helyes választ adott helyes indokkal, de a függvény definícióját helytelenül vagy nem adták meg. Egy hallgató bár nagyon pontos függvénydefiníciót adott, az 1. kérdések közül egyikre sem válaszolt. 4 hallgató megadta ugyan a függvény definícióját, de az 1. kérdések valamelyikére a helyes választ indok nélkül írta le. A többi helyes függvénydefiníciót megadó hallgató az 1.1-1.3 kérdések közül legalább az egyikre helyes választ adott helyesen indokolva azt. Ők azok, akik olyan fogalomképzettel rendelkeznek, ami bár nem hibátlan, de alkalmas arra, hogy ráépítsük az egyetemi tananyagot.



3. Összegzés

Jelen tanulmány középpontjában a villamosmérnök képzésbe bekerülő hallgatók függvény fogalmáról alkotott képzetének és definíciójának vizsgálta állt. A vizsgálatok Vinner és Dreyfus (1989) kutatásai alapján történtek. Az általuk felállított kategóriák a függvény fogalmára adott hallgatói definíciók alapján jelen felmérésben is megjelentek. A kérdésekre adott helytelen válaszok többségénél ugyanazok a hibák mutatkoztak, mint az említett tanulmányban. Nagyon sok hallgató nem tudott helyes definíciót adni a függvény fogalmára és ez összefüggésben van a bennük kialakult fogalomképzettel is. A helytelen függvény definíciókban legtöbb esetben a saját gondolat írásos formában való kivetítése okozta a pontatlan, hiányos és nem világos feleleteket.

A fogalmat nem lehet elsajátítani egy lépésben. Számos köztes szakasznak kell megelőznie a teljes fogalomelsajátítást [4]. Az eredmények viszont arra engednek következtetni, hogy ez a folyamat a vizsgált hallgatók esetében valamely szakaszban „megtört”. Mindez indokolja a függvényfogalom általános és középiskolai tanítási gyakorlatának mélyebb, alaposabb vizsgálatát, szem előtt tartva Benjamin Bloom által kidolgozott kognitív (értelmi) szint-taxonómiákból felépülő taxonómia rendszert (ismeret, megértés, alkalmazás) [1].

Irodalom

- [1] A. Ambrus, *Bevezetés a matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995.
- [2] Á. Vigné Lencsés, *A műszaki főiskolai matematika-oktatás eredményességének növelése*, Acta Pedagogica, 1, no. 2 (2001), 37-46.
- [3] S. Vinner, *Concept definition, concept image and the notion of function*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14 (1983), 293-305.
- [4] T. Dreyfus, S. Vinner, *Images and definitios for the concept of function*, Journal for Research in Mathematics Education, 20 (1989), 356-366.

Elektromos hajtású versenyautó járműdinamikai modellezése

SZÁNTÓ A., SZÍKI G. Á., HAJDU S.

University of Debrecen, szanto930922@freemail.hu

University of Debrecen, szikig@eng.unideb.hu

University of Debrecen, hajdusandor@eng.unideb.hu

Abstract. In the following we present a vehicle dynamics simulation program developed in MATLAB environment. The program is capable of calculating the dynamics functions of a vehicle from its technical data as input parameters. The program has been successfully applied for the optimization some of the technical data of an electric driven race car that was designed and constructed at the Department of Mechanical Engineering of the Faculty of Engineering University of Debrecen.

1. Az MVM futam

Az elmúlt években egyre gyakrabban esik szó arról, hogy Földünk és lakossága egy súlyos problémával szembesül: környezetünk szennyezésével, amely napjainkban is folytatódik. A közúti közlekedés jelenlegi formájában az egyik legjelentősebb környezetszennyező. Ma már léteznek olyan technológiák [1], amelyek forradalmasíthatják az ehhez használt járműveket és egyéb eszközöket, ezáltal csökkentve a káros anyag kibocsátást. Ezen technológiák fejlődéséhez természetesen további kutatások szükségesek.

Az MVM futam a környezetbarát technológiákon alapuló, alternatív hajtású járművek versenye. A rajthoz álló járművek alkotói fiatal szakemberek, többnyire mérnökhallgatók, akiket munkájukban kisebb-nagyobb cégek, egyetemi tudásközpontok, tanszékek segítenek. [2] A 2014. és 2015. évi versenyeken a DE MK Gépészmérnöki Tanszékén kifejlesztett versenyautóval már szerepeltünk, 2. és 1. helyezést érve el.



1. ábra A 2015-ös MVM futam rajtja, első helyen a gépészmérnöki tanszék versenyautója

2. A szimulációs program célja

A minél eredményesebb versenyzés érdekében fontos a jármű műszaki paramétereinek összehangolása. Ezeken belül kulcsfontosságú a hajtáslánc optimalizálása. Ebből a célból kifejlesztettünk egy szimulációs programot [3], melynek segítségével meghatározhatóak azon optimális (pl. a láncajtást, futóművet, a jármű súlyeloszlását jellemző) műszaki paraméterek, amelyekkel a kitűzött menetdinamikai célok (pl. a versenytáv megtétele a legrövidebb idő alatt) elérhetők.

3. A versenyautó

Az autó az MVM futam „Prototípus” kategóriára vonatkozó versenyszabályzatnak megfelelően készült, és először a 2014. évi versenyen szerepelt. A jármű váza egy alumínium csövekből illetve zártszelvényekből összehegesztett térhálós szerkezet, amelyhez egy független, kettős kereszt lengőkaros első kerékfelfüggesztés, valamint az önállóan rugózó hátsó hajtóegység kapcsolódik. Az utóbbi magába foglalja a motort, motorvezérlést, láncajtást, és a hátsó kerekeket. A vázszerkezet részét képezi még a járművezető mellett két oldalon kialakított akkumulátortartó, valamint a biztonsági szempontok figyelembe vételével kialakított bukókeret.



2. ábra. Az autó jelenlegi állapota, burkolat és akkumulátor nélkül

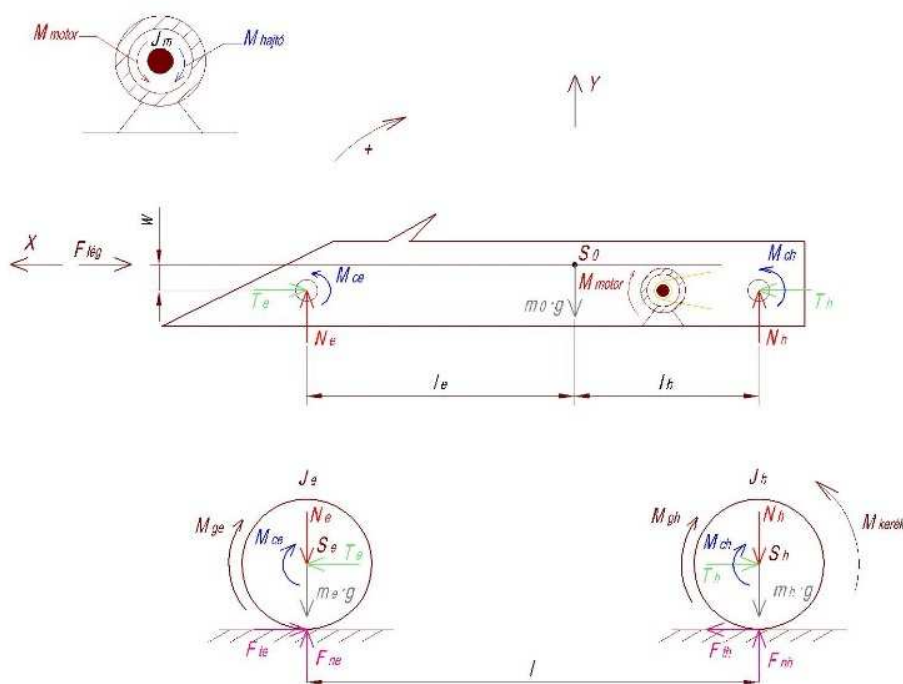
A hajtásról egy soros gerjesztésű, 4 kW-os egyenáramú motor [4] gondoskodik, amely láncajtáson keresztül adja át a nyomatékot a meghajtott, kúpgörgőkkel csapágyazott hátsó tengelynek, és az ahhoz mereven kapcsolódó keréknek. A jármű lassításáról kétkörös fékrendszer gondoskodik kerekenként külön tárcsafékkal.

4. A dinamikai modell

A szimulációs programhoz egy olyan járműdinamikai modellt dolgoztunk ki, amelyben az autót négy, egymással szoros kapcsolatban lévő szerkezeti egységre bontjuk. Jelenleg az autónak csak a jobb hátsó kereke hajtott, de a közel jövőben a bal hátsó kereket is hajtottá kívánjuk tenni, így a modellt már erre a „végleges” elrendezésre dolgoztuk ki. Ennek figyelembe vételével a fent említett szerkezeti egységek az alábbiak:

- 1) Meghajtott hátsó kerekek, és az azzal együtt forgó alkatrészek;
- 2) Szabadon futó első kerekek, valamint az azokkal együtt forgó alkatrészek;
- 3) Járműfelépítmény, valamint a motor állórésze;
- 4) Motor forgórésze.

Ezen szerkezeti elemekre külön-külön mozgásegyenleteket írunk fel, a külső erők és nyomatékok mellett figyelembe véve a különböző szerkezeti elemek között fellépő (belső) erőket és nyomatékokat (Newton III. törvénye alapján).



3. ábra. A versenyautó különböző szerkezeti egységeire ható erők és nyomatékok

Ezt követően felírhatjuk a jármű egyes szerkezeti egységeire vonatkozó mozgásegyenleteket:

Mozgásegyenletek a szabadon futó első kerekekre, és az azokkal együtt forgó alkatrészekre:



$$\text{I. } \sum_i F_{ix} = T_e - F_{te} = m_e \cdot a_s \rightarrow T_e = m_e \cdot a_s + F_{te}$$

$$\text{II. } \sum_i F_{iy} = F_{ne} - N_e - m_e \cdot g = 0$$

$$\text{III. } \sum_i M_{i(S_e)} = M_{ge} + M_{ce} - F_{te} \cdot R = J_e \cdot \varepsilon_e$$

Mozgásegyenletek a meghajtott hátsó kerekre, és az azokkal együtt forgó alkatrészekre:

$$\text{IV. } \sum_i F_{ix} = F_{th} - T_h = m_h \cdot a_s \rightarrow T_h = -m_h \cdot a_s + F_{th}$$

$$\text{V. } \sum_i F_{iy} = F_{nh} - N_h - m_h \cdot g = 0$$

$$\text{VI. } \sum_i M_{i(S_h)} = M_{gh} + M_{ch} + F_{th} \cdot R - M_{kerék} = J_h \cdot \varepsilon_h$$

Mozgásegyenletek a járműfelépítményre:

$$\text{VII. } \sum_i F_{ix} = T_h - T_e - F_{lég} = m_0 \cdot a_s$$

$$\text{VIII. } \sum_i F_{iy} = N_e + N_h - m_0 \cdot g = 0$$

$$\text{IX. } \sum_i M_{i(S_0)} = M_{motor} - (M_{ce} + M_{ch}) + N_e \cdot l_e - N_h \cdot l_h - T_e \cdot w + T_h \cdot w = 0$$

Mozgásegyenlet a motor forgórészére (csak forgómozgásra):

$$\text{X. } -M_{motor} + M_{hajtó} = J_m \cdot \varepsilon_{mot} = J_m \cdot i_{12} \cdot \varepsilon_h \left(\varepsilon_h = \varepsilon_{mot} \cdot \frac{1}{i_{12}} \right)$$

A „slip” figyelembe vétele a hátsó kerekknél:

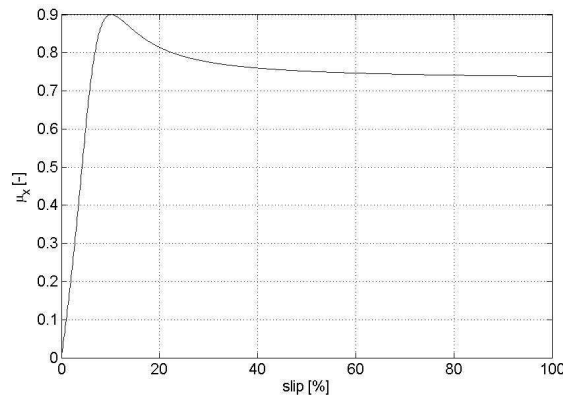
A „slip” a kerékcúszás mértéke, amelyet az alábbi összefüggés értelmez:

$$slip = \frac{\omega_h \cdot R - v_s}{v_s} \cdot 100\%$$

Ahol: ω_h , R és v_s a hátsó kerék szögsebességének nagysága, sugara és középpontjának sebesség nagysága. A talaj által a hátsó kerekre kifejtett súrlódási és nyomóerő hányadosát (azaz a súrlódási tényezőt) megadhatjuk a „slip” függvényében. Erre vonatkozik az alábbi, ún Pacejka „varázssformula” [5, 6, 7]:

$$\frac{F_{th}}{F_{nh}} = \mu = c_1 \cdot \sin \left(c_2 \cdot \operatorname{atan} \left(c_3 \cdot slip - c_4 \cdot (c_3 \cdot slip - \operatorname{atan}(c_3 \cdot slip)) \right) \right)$$

Ahol a c_1, c_2, c_3 és c_4 konstansokat méréssel kell meghatározni.



4. ábra. A Pacejka „varázssformula” grafikonja $c_1 = 0,9$, $c_2 = 1,4$, $c_3 = 7,936$, $c_4 = -10$ értékek esetén

A légellenállási erő számítása:

A légellenállási erő eredőjének nagyságára, az alábbi összefüggés érvényes [7]:

$$F_{lég} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot A \cdot \rho \cdot v_s^2$$

Ahol: C és A a jármű alaki tényezője és homlokfelülete, ρ a levegő sűrűsége, v_s pedig a jármű közeghez viszonyított sebessége.

A gördülési ellenállási nyomaték számítása:

A gördülési ellenállási nyomaték nagyságát – az első, és hátsó kerekek esetében – az alábbi összefüggésekkel számítottuk [8]:

$$M_{ge} = f_e \cdot F_{ne}, \quad M_{gh} = f_h \cdot F_{nh}$$

Ahol: f_e és f_h a gördülési ellenállás karja, F_{ne} és F_{nh} pedig a talaj által kifejtett nyomerő nagysága az első, illetve hátsó kerekek esetében.

A csapágy ellenállási nyomaték számítása:

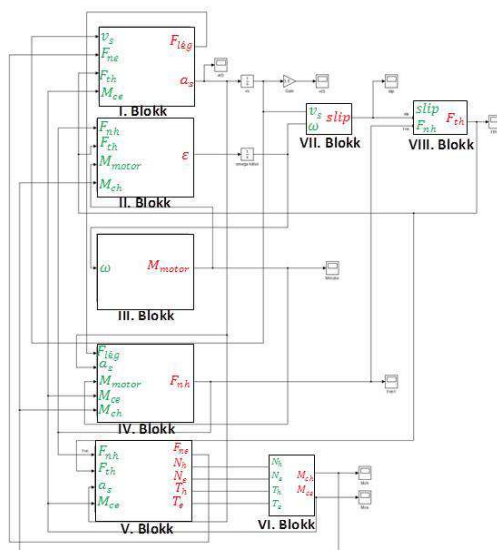
A csapágy ellenállási nyomaték nagyságát – az első, és hátsó kerekek esetében – az alábbi összefüggések szolgáltatják:

$$M_{ce} = \sqrt{N_e^2 + T_e^2} \cdot \mu_{cs} \cdot \frac{d}{2}, \quad M_{ch} = \sqrt{N_h^2 + T_h^2} \cdot \mu_{cs} \cdot \frac{d}{2}$$

Ahol: N_e és T_e valamint N_h és T_h a normális és menetirányú terhelés az első, illetve hátsó tengelyen, μ_{cs} a csapágy ellenállási tényező, d pedig a csapágy átmérője (kúpgörgős csapágnál a közepes átmérő).

5. A szimulációs program

Az ismertett dinamikai modellre alapozva, a Matlab [9] szoftver alkalmazásával létrehoztunk egy szimulációs programot, amely az irodalomból ismert és kísérletileg meghatározott műszaki adatokból, mint bemenő paraméterekből kiszámítja a versenyautó menetdinamikai jellemzőit.



5. ábra. A szimulációs program blokkdiagramja

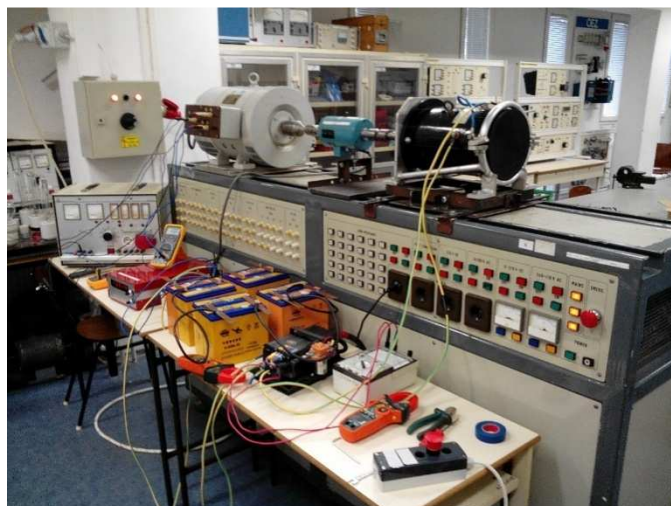
Az ábrán látható nyolc blokk mindegyike összetett alstruktúrával rendelkezik, amit a [3] forrásban részletezünk.

6. A program bemenő paramétereinek kísérleti meghatározása

A szimulációs program bemenő paramétereinek között vannak olyanok, amelyek meghatározásához összetett mérési eljárás szükséges. Ezen paraméterek egy részét már meghatároztuk (motor karakterisztika, tömegek, tehetetlenségi nyomatékok, a jármű súlypontja), a többit (gördülési ellenállási kar, csapágy és légellenállási tényező) a későbbiekben tervezzük. Az elvégzett mérések közül itt csak a motor karakteristikára vonatkozót ismertetjük.

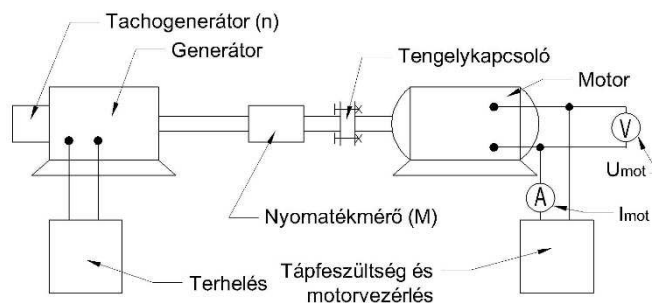
Motor karakterisztika

A motor karakterisztika kísérleti meghatározását a Debreceni Képző Központtal (DKK) együttműködésben végeztük a Debrecen, Budai Ézsaiás u. 8/A székhelyen lévő II. számú Villanyszerelő tanműhelyben (E04). A 6. ábra a mérőelrendezésről készült fényképet mutatja.



6. ábra. A motor karakterisztika mérése

A mérési elrendezés sematikus rajzát a 7. ábra szemlélteti.



7. ábra. A mérési elrendezés sematikus rajza

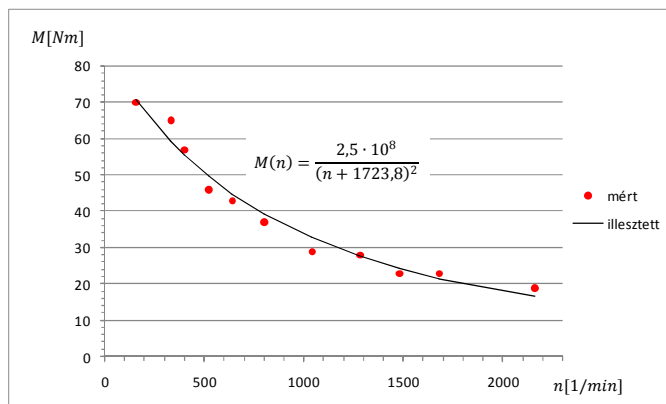
A motor négy darab sorosan kapcsolt 12 [V]-os akkumulátorból kapja a tápfeszültséget egy motorvezérlő elektronikán keresztül. A motorra eső feszültség egy gázpedállal szabályozható.

A vázolt elrendezés pontosan ugyanaz, ami a versenyautóban üzem közben megtalálható. A motor karakterisztika mérését a gázpedál maximum állásánál (padlógáz) végeztük el. A mérési eredményeket a 1. táblázat tartalmazza.

48 [V]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n [V]	3,9	8,3	10	13	16	20	26	32	37	42	54
n [1/min]	156	332	400	520	640	800	1040	1280	1480	1680	2160
M [Nm]	70	65	57	46	43	37	29	28	23	23	19
Imot [A]	410	390	341	307	280	258	216	202	177	180	136
Umot [V]	18	22	21	21	22	22,5	24,5	27,5	29	34	39
Ibe [A]	340	270	290	270	250	220	208	203	177	180	140
Ube [V]	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49

1. táblázat. A motor karakterisztika kísérleti meghatározása során kapott eredmények

A motor nyomatékát fordulatszámának függvényében a 8. ábra szemlélteti.



8. ábra. A motor nyomatéka fordulatszámának függvényében

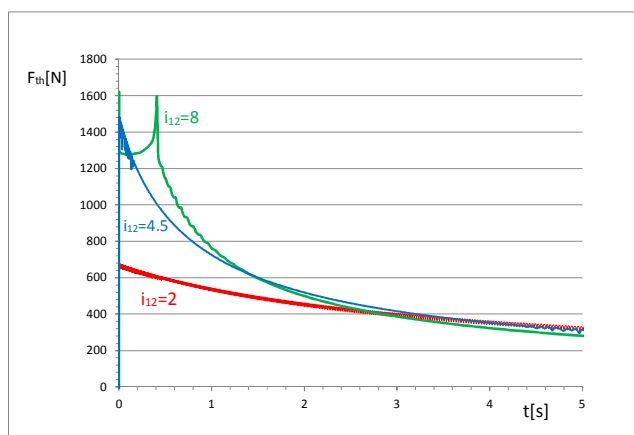
A mért értékeket a Maple13 [10] szoftver segítségével megillesztettük. Az illesztéshez alkalmazott függvény és képe a 8. ábrán látható.

7. A program által szolgáltatott menetdinamikai függvények

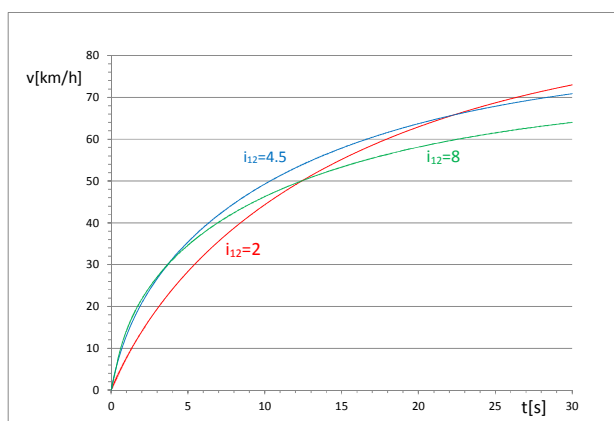
A programmal előállítható menetdinamikai függvények az alábbiak:

- A jármű gyorsulása, sebessége és az általa megtett út a menetidő függvényében.
- A talaj által a jármű kerekeire kifejtett tangenciális és normális irányú erők a menetidő függvényében.
- A tangenciális és normál irányú tengelyterhelések a menetidő függvényében.
- A gördülési és csapágy ellenállási nyomatékok a menetidő függvényében.
- A légellenállási erő az idő függvényében.
- Kerékcúszás („slip”) a menetidő függvényében.

A fenti függvényekből példaként most bemutatunk néhányat különböző bemenő paraméterek rögzítése mellett. Az 9. ábra a versenyautó hátsó kerekeinek kerületén fellépő vonóerőt mutatja a menetidő függvényében, különböző láncátvételek esetén. Az áttételen kívül minden más bemenő paraméter egyezik a három esetben.

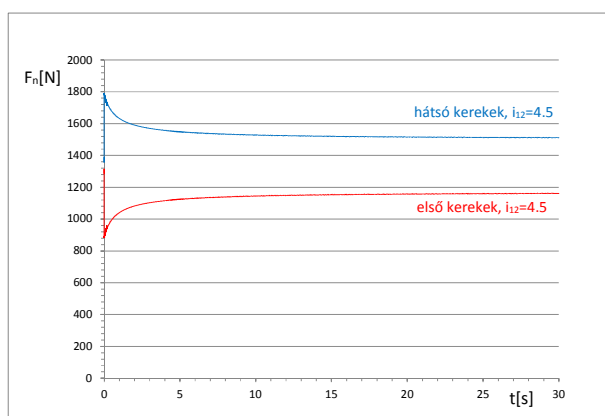


9. ábra. A hátsó kerekek kerületén fellépő vonóerő a menetidő függvényében különböző láncátvételek esetén
A 10. ábra a versenyautó sebesség-idő függvényeit szemlélteti ugyanazon láncátvételek mellett.



10. ábra. Sebesség-idő függvények különböző láncátvételek esetén

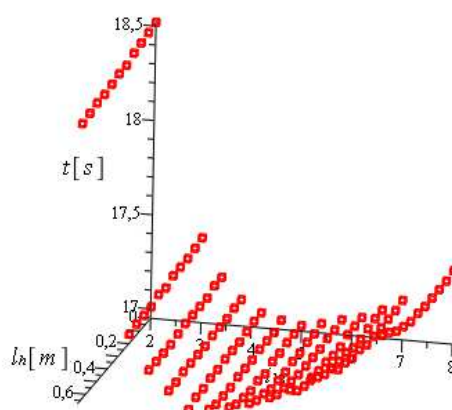
A 11. ábrán a versenyautó első és hátsó kerekeire ható nyomóerőket ábrázoltuk a menetidő függvényében ugyanazon bemenő paraméterértékek mellett.



11. ábra. Az első és hátsó kerekekre ható nyomóerő a menetidő függvényében

8. A program alkalmazása egy optimalizálási feladatra

A szimulációs program fő célja, hogy segítségével meghatározzuk azon optimális műszaki adatokat, amelyekkel a legjobb menetdinamikai tulajdonságok érhetők el. Természetesen különböző versenyfeladatokhoz különböző optimális értékek tartoznak. Más értékek lesznek ideálisak például egy hosszú távú körverseny, vagy egy rövid távú (pl. 200m hosszú) gyorsulási verseny esetén. A továbbiakban példaként a gyorsulási verseny esetével foglalkozunk két paraméterre elvégezve az optimalizálást. A két paraméter egyike a jármű súlypontjának hátsó tengelytől mért vízszintes irányú távolsága, a másik a láncáttétel értéke. A többi paraméter értékét a versenyautóban jelenleg alkalmazott értékekben rögzítettük. Az optimalizálás elve az, hogy a láncáttétel értékét, valamint a súlypont hátsó tengelytől mért távolságát a [2;8] és [0;0,675][m] tartományokban változtatva megkeressük azon optimális értékpárokat, amelyekkel álló helyzetből indulva legrövidebb idő alatt teljesíthető a 200m-es táv.



12. ábra. A 200 m-es táv megtételéhez szükséges menetidők a láncáttétel és a hátsó keréktől mért súlyponttávolság függvényében

Az eredményekből leolvasható, hogy a minimális menetidő akkor érhető el, ha a jármű súlypontja a hátsó tengelytől 0,34 – 0,47m távolságban van, és 5-ös érték körüli láncáttételt alkalmazunk.

9. Összefoglalás

Az ismertett szimulációs program – a fejlesztések jelenlegi szintjén – egyenes pályán gyorsító jármű menetdinamikai függvényeinek előállítására szolgál a járművet jellemző műszaki adatokból. A szokásos menetdinamikai függvények (gyorsulás-, sebesség- és út-idő függvény) mellett a program képes a talaj által a kerekre kifejtett tangenciális és normális irányú erők, valamint tengelyterhelések időfüggésének számítására.

A program a jármű mozgását befolyásoló hatások (tényezők) szinte mindegyikét figyelembe veszi, így például a motor karakterisztikát, gördülési, csapágy és légellenállást, a forgó részek



tehetetlenségi nyomatékait, a jármű súlypontjának helyét, valamint a kerék és talaj között fellépő súrlódási tényezőt a kerékcsúszás („slip”) függvényében.

A program működéséhez szükséges bemenő műszaki paraméterek egy részét a tanszékünkön tervezett és kivitelezett elektromos meghajtású versenyautó esetében már kísérletileg meghatároztuk, ilyenek a motor karakterisztika, a forgó részek tehetetlenségi nyomatékai valamint a jármű súlypontja. A hiányzó paraméterek meghatározását a jövőben tervezzük.

A program egyenes pályán történő gyorsítás esetén már jelenlegi formájában is alkalmazható a legkedvezőbb menetdinamikai tulajdonságokat biztosító optimális műszaki paraméterek meghatározására. Ezt egy két paraméteres optimalizálási feladat formájában be is mutattuk.

A jövőben tervezzük a program továbbfejlesztését egy teljes, kanyarokat is tartalmazó versenypályára, amely gyorsítási és fékezési szakaszokat egyaránt tartalmaz. A végső célunk egy új tanszéki versenyautó tervezése és megépítése, amelyet már a továbbfejlesztett programunk által meghatározott optimális műszaki paraméterekre alapoznánk.

Irodalomjegyzék

- [1] M. Zöldy, I. Emőd, Z. Tölgyesi, Alternatív járműhajtások – Maróti Könyvkereskedés és Könyvkiadó Kft. (2006) ISBN 9639005738
- [2] <http://energiafutam.ahjv.hu/content/index/id/1/m/5>
- [3] A. Szántó, Elektromos hajtású tanszéki versenyautó járműdinamikai modellezése, TDK dolgozat (2015), konzulensek: Szíki Gusztáv Áron, Hajdu Sándor.
- [4] http://webaruhaz.permanent.hu/termek/elektromos_auto-1-motorok-135/dc48v_os_4kw_os_soros_villanymotor-187
- [5] H. B. Pacejka, I. Besselink, *Tire and Vehicle Dynamics (Third edition)*, Elsevier (2012) ISBN 978-0-08-097016-5.
- [6] J. Reimpell, J. W. Betzler, G. Bári, Z. Hankovszki, L. Kádár, Z. Lévai, I. Nagyszokolyai, Gépjármű futóművek I. (2012) ISBN 978-963-279-606-2
- [7] B. Heissing, M. Ersoy, *Chassis Handbook* (2011) ISBN 978-3-8348-0994-0
- [8] L. Ilosvai, *Járműdinamika* (2013)
- [9] Matlab 2014b, TheMathWorks, Inc, Natick, Massachusetts, United States.
- [10] Maple 13.0, Copyright © Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 1981-2009.



Mozgástani kísérletek NI eszközökkel támogatva

DARAI GY., FILEP G., NAGYNÉ KONDOR R., SZÍKI G. Á.

University of Debrecen, darai@eng.unideb.hu

University of Debrecen, filep95@gmail.com

University of Debrecen, rita@eng.unideb.hu

University of Debrecen, szikig@eng.unideb.hu

Abstract. In the framework of TAMOP -4.2.3-12/1/KONV-2012-0048 project we elaborated a program module "The Language of Mechanics", which is recommended mainly to graduating secondary school students, but it can also be a useful practical supplement for college and university students in the subject Dynamics. In the program module a rolling motion problem is studied by students – supervised by teachers –theoretically and experimentally, applying a set-up which has been recently developed at the Faculty of Engineering the University of Debrecen. In the present work we describe measurement technique developments which had been made on the set-up applying NI devices and LabVIEW.

Bevezetés

„A természettudományokban az igazság egyedüli kritériuma a kísérlet.”

R. P. Feynman Nobel-díjas fizikus

Az utóbbi években a műszaki felsőoktatásban tanuló hallgatók matematikai, fizikai ismeretének, matematikai gondolkodási szintjének hanyatlását tapasztalhatjuk; aggodalomra ad okot, hogy a végzett mérnökök körében visszaesett a matematika és a fizika alkalmazásának képessége. [2, 10, 11, 14] A felsőoktatás módszertana eddig eléggé elhanyagolt terület volt, arra építve, hogy a legértelmesebb diákok kerülnek be a főiskolákra, egyetemekre, és ők maguk is meg tudják tanulni a leadott anyagot. A tapasztalatok azonban azt mutatják, hogy a hagyományos matematikaoktatás változtatások nélkül kevés a problémák megoldására. Szükség van olyan új módszerekre, melyek a hagyományos oktatást kiegészítik, módosítják. A jelenlegi helyzet javulásához elvezető módszer a matematika- és fizikaoktatás tartalmi megújítása, újragondolása. [4] Arra kell törekednünk, hogy a matematika- és fizikaoktatás az ismeretek átadásának klasszikus szemléletmódú útján változtassunk.

E célt szolgáló módszertani újításunk például a Debreceni Egyetem Műszaki Karán új szemléletben íródott „Matematikai eszközök mérnöki alkalmazásokban” című kötet [9], mely elsősorban azt hangsúlyozza, hogy miért kell matematikai módszereket, fogalmakat megtanulni, hol és hogyan alkalmazhatók ezek. [8] A mérnöki tudományokból vett példák és a dinamikus geometriai szoftverek alkalmazása szemléletesebbé teszi a mérnöki fizika és a matematika oktatását, továbbá érthetőbbé teszi e tárgyak adott tudományterülettel való kapcsolatát. A motiváció, az oktatási haszna mellett a dinamikus geometriai rendszerekkel készült animációk

például hatékony segédeszközt jelentenek különböző mérnöki alkalmazások dinamikus modellezéséhez. [6, 7]

Kísérletezés nélkül elképzelhetetlenek a fizika, illetve a fizika tanítása az iskolában. A fizika tanítása során helye van a figyelemfelkeltő látvány-kísérleteknek, a kvalitatív jelenségbemutatásnak, a demonstrációs méréseknek, a magyarázatot segítő modellkísérleteknek. [3] A fizikatanítás egyik fontos és érdekes témaköréhez, a mozgástanhoz készített programelemmel olyan rendhagyó óra előkészítése volt a cél, melyen a tanuló/hallgató egy problémát kísérleti és elméleti úton is vizsgál és az így kapott eredményeket összeveti. Mindeközben kombináltan használja a matematikai, fizikai és számítástechnikai ismereteit, illetve megismerkedik több számítógépes program használatával.

1. Mozgástani programelem NI eszközökkel

A kísérlet-alapú módszertani újítással kapcsolatosan megtartott rendhagyó középiskolai órák a „TÁMOP-4.2.3-12/1/KONV-2012-0048 Tudományos eredmények elismerése és disszeminációja a Debreceni Egyetem kutatói, oktatói és hallgatói által” című pályázat keretében valósultak meg. A programelemet tizenkettedik osztályos középiskolás diákoknak ajánljuk, de hasznos gyakorlati kiegészítést nyújt egyetemistáknak és főiskolásoknak is a Műszaki mechanika [5] azon belül a Mozgástan című tantárgyhoz [13]. Emellett hasznos ötleteket meríthetnek belőle a tanárok, oktatók is. (1. ábra)



1. ábra. A régi kísérleti eszköz

A fizikai kísérletek tanterembe vitelére a számos módszertani újítás közül egyet emelnénk ki, egy magyar fejlesztésű, Webcam laboratory [12] nevű számítógépes programot, mely a számítógéphez csatlakoztatott kamerát használja fel egyszerű és látványos kísérletek, mérések elvégzésére. Tanári vezetéssel az iskolában a fizika órán vagy otthoni kísérletekkel megfigyelhető és mérésekkel vizsgálható a természet sok érdekes jelensége. Mi módszertanilag motiválóbbnak éreztük, ha a tanulók saját maguk hajtják végre a kísérletet; többek között a valós mérés közben felmerülő hibaforrásokat is megtapasztalhatják így.

A mérnökképzés első évében (és a középiskolás diákoknál) kritikus fontosságú megismertetni a hallgatókat a mérnöki tudományok jelentőségével. A National Instruments mérnöki gyakorlatba bevezető oktatási megoldásai esetében az NI LabVIEW [15] rendszertervező szoftver többféle

oktatási hardverplatformmal párosítható, így a hallgatóknak/diákoknak számos területen gyakorlatias képzési tapasztalatokat nyújt. [1] Szükség van arra, hogy a középfokú és felsőfokú képzésben nagyobb szerephez jusson az új eszközök alkalmazása a használati lehetőségeket megmutatva. E cél vezérelt bennünket abban, hogy a mozgástani programelemet kiegészítettük szoftveres és hardveres NI eszközök használatával.

Ezen fejlesztések először hardver-, majd szoftver szintjén is megjelentek. A fejlesztések során alapvetően a pontosabb időmérést tűztük ki célul, majd program segítségével különböző kinematikai grafikonok felvételét. A fent említett programelem részeként megvalósításra került berendezésre felszereltünk hat darab MSW-0 típusú mikrokapcsolót. (2. ábra)



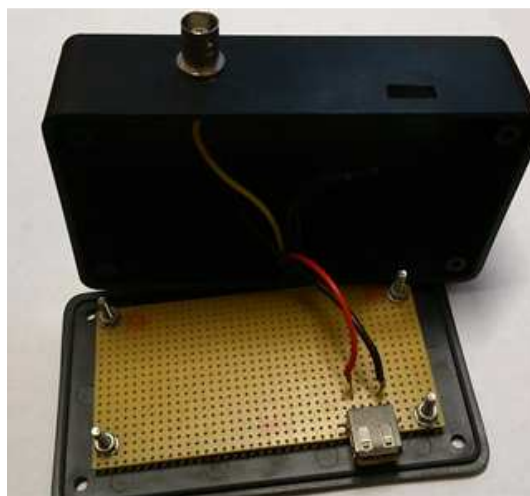
2. ábra. Az MSW-0 típusú mikrokapcsoló

A mérésekhez a DE MK Műszaki Alaptárgyi Tanszékének birtokában lévő NI-9234 adatgyűjtő kártyát használtuk USB platformmal. Az eszköz egy négy csatornás, dinamikus rezgésmérésre kifejlesztett kártya. A bemeneteire érkező jeleket IEPE (integrated electronic piezoelectric) és non-IEPE szenzorok segítségével dolgozza fel, csatornánként másodpercenként maximum 51200-at. A kártya analóg jelek beolvasására képes. Az eszköz a cRio nevet viseli. (3. ábra)



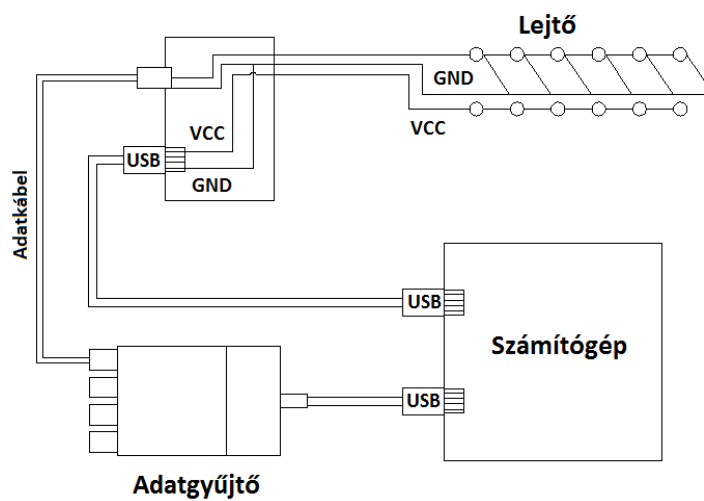
3. ábra. A felhasznált mérésadatgyűjtő egység

Egy szerelődoboz keretein belül került megvalósításra a kontaktus létrehozása az egyes részek között. Mind biztonsági, mind praktikussági okokból szükséges volt. (4. ábra)



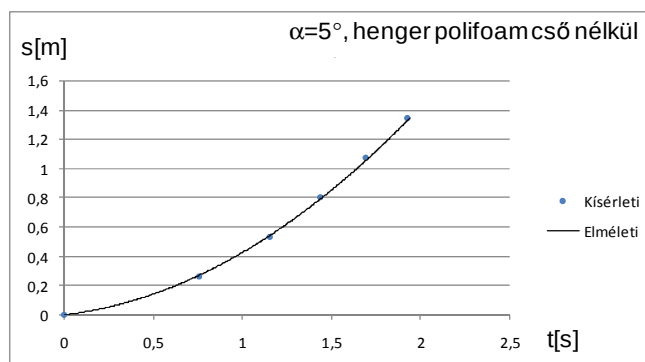
4. ábra. A szerelődoboz

A szerelődobozban (4. ábra) egy USB csatlakozót, egy BNC csatlakozót és több szál vezetékot köt össze a kapcsolás. Az USB csatlakozó 4 szál vezetékot tartalmaz: VCC, Data +, Data -, GND. A kapcsolás sematikus rajzát mutatja az 5. ábra.



5. ábra. A kapcsolás sematikus rajza

Miután a hardveres fejlesztésekkel digitalizálásra kerültek a jelek, ezen jeleket a LabVIEW 2012 programban olvastuk ki. A mért értékeket az elméleti úton meghatározott $s(t)$ függvénnyel összevetve a 6. ábra szemlélteti 5° -os lejtőszög esetén.



6. ábra. Az acélhenger súlypontjának út-idő függvénye $\alpha=5^\circ$ lejtőszög esetén

2. Összefoglalás

A mozgástani programelemünk a gördülő mozgás vizsgálatán keresztül bemutatja, hogy a mechanika, matematika és számítástechnika eszközeinek összehangolt alkalmazásával hogyan számítható ki egy fizikai test mozgása, majd a kísérleti megvalósításon keresztül bemutatja az elmélet és a valóság kapcsolatát. E programelemet egészítettük ki szoftveres illetve hardveres eszközökkel, a módszertani kívánalmaknak megfelelően, hiszen szükség van arra, hogy a középfokú és felsőfokú képzésben nagyobb szerephez jusson az új eszközök alkalmazása a használati lehetőségeket megmutatva. Az interaktív foglalkozás során a középiskolás diákok betekintést nyernek a Newtoni mechanika világába, és hasznos gyakorlati és elméleti ismeretekre tesznek szert. A diákok személyesen tapasztalják meg, hogy egy gyakorlati probléma megoldása hogyan kivitelezhető több tudományterület eszközeinek együttes, összehangolt alkalmazásával.

Irodalomjegyzék

- [1] Bevezetés a mérnöki gyakorlatba. <http://hungary.ni.com/akademia/oktatasi-teruletek/bevezetes-a-mernoki-gyakorlatba>
- [2] A. Csákány, J. Pipek, (2009). A 2009. szeptemberében a műszaki és természettudományos szakokon tanulmányaikat kezdő hallgatók által írt matematika felmérő eredményeiről. Matematikai Lapok, 1, 1-15.
- [3] P. Jenei, Á. Enreiter, A. Juhász, M. Nagy, (2011). Kísérletek hullámokkal (In: Tasnádi P. (szerk.): Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan). ELTE Természettudományi Kar, Budapest, ISBN: 978-963-284-224-0, 79-85.
- [4] Z. Kovács, (2013). A romániai magyar nyelvű fizikatanár-képzés gondjai, távlatai. (In: Juhász, A. – Tél, T. (szerk.): A FIZIKA, MATEMATIKA ÉS MŰVÉSZET TALÁLKOZÁSA AZ OKTATÁSBAN, KUTATÁSBAN), ELTE Természettudományi Kara, Budapest, ISBN 978-963-284-346-9, 299-304.



- [5] B. M. Csizmadia, E. Nándori, (1997) *Mechanika mérnököknek: Mozgástan*. Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
- [6] R. Nagy-Kondor, G. Á. Szíki, (2014). *GeoGebra animations for the course book "Mathematical tools in engineering applications"* (In: *Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences*). Teaching Mathematics and Computer Science, 12/1, 130.
- [7] R. Nagy-Kondor, G. Á. Szíki, (2013). *Engineering Applications in the Teaching of Mathematics II*. Debreceni Műszaki Közlemények, 1, 57-60.
- [8] R. Nagy-Kondor, G. Á. Szíki, (2009). *Mathematical tools in engineering applications*. 33rd International Congress of Teachers of Mathematics, Physics and IT, Conference Volume, 50-54.
- [9] R. Nagy-Kondor, G. Á. Szíki, (2009). *Matematikai eszközök mérnöki alkalmazásokban I*. DE MK, Ceze Kft., ISBN 978-963-88614-0-5
- [10] K. Radnóti, J. Pipek, (2009). *A fizikatanítás eredményessége a közoktatásban*. Fizikai Szemle, 3, 107-113.
- [11] K. É. Sashalminé (1999). *Egy felmérés tanulságai*, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 26. 121-126.
- [12] Zs. Szigetlaki, A. Juhász, (2011). *WEB-CAM Laboratory - Új lehetőség a számítógépes kísérletezésben* (In: *Tasnádi P. (szerk.): Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan*). ELTE Természettudományi Kar, Budapest, 242-247. ISBN: 978-963-284-224-0
- [13] G. Á. Szíki, R. Nagyné Kondor, A. Vinczéné Varga, (2013). *Méréssel és számítógéppel támogatott mozgástani programelem középiskolásoknak és egyetemistáknak*. Proceedings of the Conference on Problem-based Learning in Engineering Education, ISBN 978-963-473-628-8, 24-28.
- [14] Ö. Vancsó, (2002). *Élő matematika*. Új Pedagógiai Szemle, 10, 1-7.
- [15] <http://hungary.ni.com/labview>



Megújuló villamosenergia-termelés szerepe egy kisváros energiaellátásában

CSIZMADIA I. A., GYŐRI B.

Debreceni Egyetem, csivett21@gmail.com

Debreceni Egyetem, gyoribarnabas1994@gmail.com

Abstract. The cities of the world to meet the energy demands use primarily fossil fuel. The current rate of fossil fuels steadily reduced aren't renewed in human rate. Currently, there are efforts to give local energy needs from renewable energy sources can help satisfy. In Hungary, renewable energy sources are present in rudimentary measured. This article aims to show how a town in Hungary importance of renewable energy presence. Examine a community energy endowments and analyze whether it is worth to invest in renewable energy equipment.

Bevezetés

Napjaink egyik legnagyobb problémájává nőtte ki magát a fosszilis energiahordozók kimerülése, valamint az azok kitermelése és felhasználása következtében jelentkező környezetszennyezés. Ennek következtében egyre nagyobb hangsúlyt kapnak a megújuló energiaforrások, egyre nagyobb az érdeklődés az alternatív megoldások alkalmazása iránt.

Kutatási témánk kiválasztása során is ebből az egész világot érintő helyzetből indultunk ki. Azt szeretnénk volna kideríteni, hogy mekkora szerepe van a megújuló energiaforrásoknak egy átlagos pár ezer fős magyarországi település életében, valamint a település milyen mértékben lenne képes alkalmazni a megújuló energiaforrásokat villamosenergia-szükségletének kiváltására.

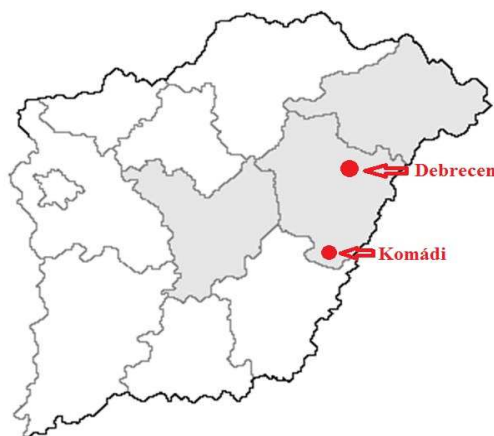
1. Megújuló villamosenergia-felhasználás magyarországi helyzete

Magyarország adottságai a megújuló energiaforrásokat tekintve nagyban eltérő értékeket mutat. Az alábbi táblázat a Magyarországon üzembe helyezett megújuló energiaforrásokat hasznosító erőművek kapacitását mutatja 2013-ban.

Megújuló energiaforrások	Előállított villamosenergia-mennyiség (GWh)
Napenergia (PV)	25
Szélenergia	717
Geotermikus energia	0
Vízenergia	213
Biogáz	29
Biomassza	1470

1. táblázat: Megújuló energiaforrásokból megtermelt villamosenergia-mennyiség Magyarországon
2013-ban Forrás:[1 alapján saját szerkesztés]

A legnagyobb mértékben szilárd biomasszából állítunk elő villamos energiát. Az ország beépített összes biomassza kapacitás 162 MW, mellyel 1470 GWh villamos energiát állítottunk elő 2013-ban. Ezt követi a szélenergia, melynek beépített kapacitása 329 MW, amely 717 GWh villamos energia előállítását fedezte a szél energiájának segítségével. Az országban összesen 32 vízerőmű található, annak ellenére, hogy folyóink nem túl nagy esésűek. A 32 vízerőmű beépített kapacitása 54 MW, melyek előállított villamosenergia-mennyisége 213 GWh volt 2013-ban. Napenergia mennyiségét tekintve az ország előnyös helyzetben van, a napsütéses órák száma átlagosan évi 2100 óra. Villamos energetikai felhasználása meglehetősen alacsony. A fotovoltaiikus rendszerek kapacitása 15 MW, melyek villamosenergia-termelése 25 GWh volt 2013-ban. Geotermikus energiával jelenleg Magyarországon még nem állítanak elő villamos energiát de Battonyánál már folyamatban van egy a geotermikus energiát felhasználó erőmű kiépítése, mely várhatóan 2018-ra elkészül és 12 MW áramot termel majd (EurObserv'ER 2014).



1. ábra. Komádi földrajzi elhelyezkedése.

2. Komádi város bemutatása

Komádi Hajdú-Bihar megye bihari részén, a Sebes-Körös folyó jobb partján terül el, Debrecen és Békéscsaba településektől megközelítőleg egyenlő távolságra. Jogállását tekintve város. Területe 145 km², lakosainak száma 2015 januárjában 5421 fő volt, de folyamatos csökkenést mutat.

A város alap- és középfokú intézményeivel a környező településekre vonzó hatást gyakorol, mely kiterjed a szomszédok Békés megyére is.

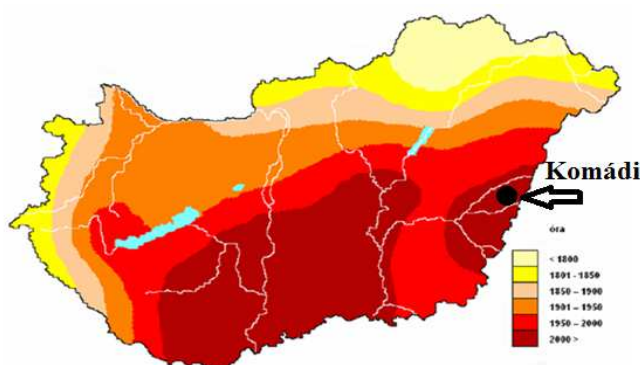
Gazdaságában nagy szerepet játszik az erdő és mezőgazdálkodás, valamint feltörekvőben van az ipari ágazat. A település adottságai kedvezőek a vállalkozások megtelepedésének, svájci és olasz ipari és mezőgazdasági vállalkozások is működnek a településen melyek több száz főt foglalkoztatnak (MEGAKOM 2010). A város fejlődésében nagy szerepet játszana a M4-es autópálya továbbépítése Berettyóújfalu-Nagykerek felé, illetve az M35-ös autópálya Debrecen-Berettyóújfalu szakaszának megépítése. Ezáltal Komádi könnyebben bekapcsolódhatna a nagysebességű közlekedési rendszerekbe, mellyel javulna tőkevonzó képessége is.

3. Komádi megújuló villamos energia hasznosítása

Ebben a részben bemutatjuk, hogy jelenleg mely megújuló energiaforrást hasznosítják villamos energia előállítására Komádiban, illetve mely megújuló energiaforrás lenne az, amelyiket még feltételezhetően gazdaságosan hasznosítani tudnák a településen.

3.1. Napenergia

Komádi a napenergia-mennyiséget tekintve, országos viszonylatban is kiemelkedően jó adottságokkal rendelkezik. A napsütéses órák száma évi ~2080 óra.



2. ábra. Napsütéses órák száma Magyarországon. Forrás: (met.hu)

A városban jelenleg három épület villamosenergia-szükségletét fedezi napelemes rendszerek segítségével.

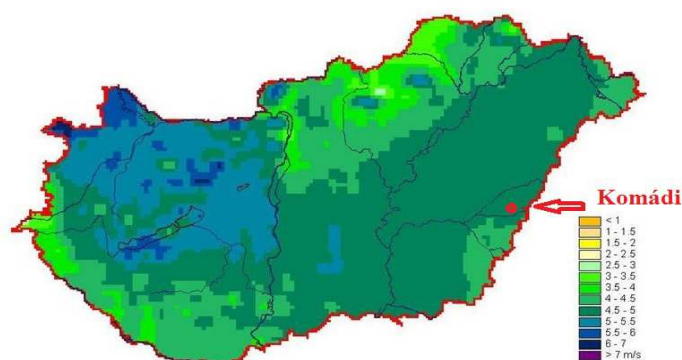
Komádi villamosenergia-igénye 677.800 kWh volt 2014-ben, ebből az önkormányzat által fenntartott épületek és egyéb létesítmények villamosenergia-szükséglete 267.800 kWh, ~40% volt. Az önkormányzat villamosenergia-felhasználásának ~ 16 %-át azaz 43.000 kWh-t fedeznek a már felszerelt napelem-rendszerekkel (Komádi önkormányzat).



3. ábra. Villamosenergia-fogyasztás és megújuló villamosenergia-termelés megoszlása.

A napelemes rendszerekkel felszerelt épületek illetve a tetőszerkezetükre szerelt napelem-panelek száma:

- Kerek egy ég alatt bölcsőde: 12 darab 250 W-os napelemmel
- Kerek egy ég alatt óvoda: 40 darab 250W-os napelemmel
- Komádi Város Polgármesteri Hivatala: 120 darab 250 W-os napelemmel



4. ábra. Magyarország szélessége 75 méteres magasságban Forrás: (met.hu)

3.2. Szélenergia

Komádi területén az átlagos szélesség 75 méteres magasságban 4,5-5 m/s nagyságú, amely érték a magyarországi átlagos szélességet is meghaladja.

Jelenleg a városban szélenergiát nem hasznosítanak semmilyen formában. A fent említett szélesség már alkalmas lenne kisebb szélgenerátorok meghajtásával villamos energia



előállítására, mellyel tovább csökkenthetné a város a fosszilis energiahordozóktól való függését, ezzel is hozzájárulva a környezetszennyezés csökkentéséhez.

4. Komádi SWOT elemzése

Hogy kicsit pontosabb képet kapjunk Komádi helyzetéről SWOT elemzést készítettünk róla, melynek segítségével könnyebben átláthatjuk a város erősségeit, gyengeségeit, jövőbeni lehetőségeit valamint veszélyeit. Ezeket az tényezőket az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

<i>Erősségek</i>	<i>Gyengeségek</i>
• Magas erdő- és mezőgazdálkodás • Kiemelkedő napenergetikai lehetőségek • Jó természeti és területi adottságok • Nyitottság • Környezettudatosság	• Alacsony infrastrukturális ellátottság • Fosszilis energiahordozók arányának túlsúlya • Tőkehiány • Magas munkanélküliség
<i>Lehetőségek</i>	<i>Veszélyek</i>
• Lakossági és mezőgazdasági hulladék energetikai felhasználása • Geotermikus energia, szélenergia hasznosítása • Pályázatok, támogatások • Munkahelyteremtés	• Munkalehetőségek hiánya • Elavult tudás, tudáshiány • Alacsony alkalmazkodó képesség • Globális felmelegedés

5. Javaslatok

Komádi helyzetét és adottságait megvizsgálva, javasoljuk a napenergia bővebb körű hasznosítását. Az épületekre további napelem-rendszerek telepítését villamos energia előállítására, valamint a lakosság használati meleg víz illetve fűtési szükségleteinek fedezését napkollektoros rendszerek alkalmazásával.

A városban a mező- és erdőgazdálkodásból felhalmozódott hulladék, biomassa erőmű illetve további biomassa kazánok telepítésével szintén hasznosítható lenne villamosenergia- illetve hőtermelési célra.

A város területén jellemző viszonylag magas szélsébséget figyelembe véve, javasoljuk az ezt az energiát felhasználó szélgenerátorok hasznosítását. A városok területén, az alacsonyabb magasságokban jellemző mérsékelt szélsebesség miatt vertikális szélgenerátorok alkalmazását javasolnánk, ugyanis ezen berendezések nagy előnye a horizontális szélgenerátorokkal szemben, hogy a vízszintes irányból érkező szél energiáján túl, a levegő felfele irányuló mozgásából adódó energiát is képesek hasznosítani. Könnyen alkalmazkodnak a szélirányváltozásokhoz és alacsony szélsébség mellett is képesek villamos energiát előállítani.

Geotermikus energiát tekintve is jó adottságokkal rendelkezik a város. Területén négy termálkút található, de mára mindegyik lezárásra került. Ezek újbóli megnyitásával, a kitermelt termálvíz



újból hasznosítható lenne balneológiai célokra, terményszárításra, vagy egy kaszkád rendszer kialakításával akár az épületek fűtésének fedezésére.

6. Összegzés

Összességében elmondható, hogy Komádi adottságai, köszönhetően földrajzi elhelyezkedésének, nagyon kedvezőek. A megújuló energiaforrásokat tekintve, a nap- a szél- és a geotermikus energiában sem szenved hiányt. A napenergia villamos energetikai hasznosítása az idei, 2015-ös évben már el is kezdődött, három önkormányzati tulajdonban lévő épület villamosenergia-szükségletét fedezik napelemes rendszerek segítségével. Geotermikus energiát korábban strandolási célra hasznosították, napjainkra azonban ez bezárásra került. Szélenergiái adottságai lehetővé teszik annak hasznosítását kisebb szélgenerátorokkal, melyek telepítésével tovább csökkenhet a város függése a fosszilis energiahordozóktól.

A megújuló erőforrások hasznosítására (a szélenergiát kivéve) állami támogatások illetve Európai Unió pályázatok vehetők igénybe, melyek jelentős anyagi segítséget nyújtanak, ezáltal csökkentik a beruházás megtérülési idejét is.

Kutatásunk további célja, megvizsgálni, hogy Komádi város önkormányzati épületeinek illetve létesítményeinek villamosenergia-szükséglete kiváltható-e megújuló energiaforrások felhasználásával. Ehhez mélyrehatóbban vizsgáljuk a település gazdasági helyzetét valamint adottságait a megújuló energiaforrásokat tekintve.

Hivatkozások

- [1] *The state of renewable energies in Europe* (2014): <http://www.energies-renouvelables.org/>
- [2] *Geographic Information System* EurObserv'ER: http://observer.cartajour-online.com/Interface_Standard/cart@jour.phtml?NOM_PROJET=barosig&NOM_USER=&Langue=Lange2&Login=OK&Pass=OK Letöltés ideje: 2015.10.26
- [3] Komádi önkormányzattól kapott adatok



Ortofotók pontossági vizsgálata úttengelyek alapján

¹VARGA ZS.*, ¹CZÉDLI H., ¹KÉZI CS., ²FEKETE Á.

¹University of Debrecen, Faculty of Engineering, v.zs.ferenc@gmail.com

¹University of Debrecen, Faculty of Engineering, hczedli@gmail.com

¹University of Debrecen, Faculty of Engineering, kezicsaba@science.unideb.hu

²Geodesic and Cartographical Inc., Debrecen, feketeakos9@gmail.com

Abstract. The data obtained from orthophotos evaluation may vary in accuracy according to the scale and resolution on the one hand and the types of cartographic units depicted on them on the other. Therefore, expected accuracy of the data to be obtained from the photos meant for use should be known prior to evaluation. Provided we have advance knowledge of the accuracy values, it may be judged whether the data would meet the requirements of the task in hand. In order to define these accuracy values we have evaluated aerial images of two chosen test sites by comparing points and lines obtained by landscape measurements with those digitalized from orthophotos. The aim of our analysis was to determine the difference between the vector files obtained from digitized orthophotos and those obtained by using geodesic measurements. We have examined whether accuracy changed with different resolutions of orthophotos. By using statistical methods we defined the expected accuracy of road centerlines digitized from photos. The determination was done by using 0.1 m/pixel, 0.4 m/pixel and 0.5 m/pixel resolutions. Our study wants to point out that the assessments we apply may indirectly be put to use for planning and research work, and the resulting data may effectively be used for road line planning, and determining road segments and public utility crossings.

1. Bevezetés

Az ortofotók elemzése során, a méretarányukból, a felbontásukból adódóan eltérő pontosságú adatok nyerhetők (Hokle 1996, Manzer 1996, Klang 1998, Greenfeld 2001, Mena 2005, Ayhan 2006, Varga- Bíró 2013, Mesas-Carrascosa 2014). A távérzékelési adatok kiértékelésének lehetőségei nagymértékben függenek a felbontástól (Rau 2002, Rossi 2004, Sivri 2004, Bakó 2010 b). A kiértékelés során nyert információk pontossága azonban nem csak a felbontástól függ, hanem attól is, hogy milyen tartalmat kívánunk meghatározni. Más például a pontosság egy pont, más egy vonal, és egy poligon esetében is. (Varga et.al.) Ezen túlmenően az úrfelvételek és az ortofotók interpretációja tévedések, hibák lehetőségeit is magukban hordozzák (Szabó 2011). Helytelen interpretációhoz vezet a kiértékelésben, ha például a vizsgálatokat nem a keresett objektum-típusnak, az adott feladatnak megfelelő felbontású távérzékelte felvételen végzik (Bakó 2010a).

Egyes feladatokhoz elegendő lehet egy kis felbontással rendelkező felvétel, míg más esetben egy nagyfelbontású ortofotó sem biztosítja feltétlenül az elvégzendő feladat pontossági követelményeit. Ahhoz, hogy el tudjunk igazodni a forgalmazók által kínált termékek között, a

felbontáson túl ismernünk kell az ortofotók és űrfelvételek pontosságát és megbízhatóságát egyaránt (Smith 1997, Akdeniz 2004, Alexandrov 2004).

Az ortofotók pontosságainak ismerete nélkül nehéz eldönteni azt, hogy az adott feladatra vonatkozó pontossági követelményeknek, előírásoknak a térképünk eleget tesz-e. Fontos annak ismerete, hogy a felvételekből nyerhető adatokat és az ezekből nyert eredményeket milyen szakterületeken és milyen feladatokhoz használják majd fel. Ennek érdekében négy területen folynak vizsgálatok a légi és űrfelvételek pontosságának meghatározására. A kutatási területek közül egy Nyíregyházán, egy Kecskeméten, egy a Hajdúhátton, Hajdúböszörmény várostól Keletre (I.), míg egy pedig Magyarország ÉK-i részén, Nyírlugos település környékén található (II.) (1. ábra)

A vizsgálat arra keresi a választ, hogy milyen eltérések adódnak különböző felbontású ortofotókról meghatározott vektoros állományok és a geodéziai módszerrel meghatározott vektoros adatok között.



1. ábra. Az „I” és „II” kutatási területeken felmért és digitalizált úttengelyek elhelyezkedése.

2. Alkalmazott módszerek

A kutatás során mindkét munkaterületen a terepen mért valamint az ortofotókon és űrfelvételeken digitalizált vonalakat hasonlítottuk össze.

Elemeztük a 2012-ben készült 0,1 m/pixel felbontású, 2011-ben készült 0,4 m/pixel felbontású, valamint a 2007. évben készült 0,5 m/pixel felbontású ortofotókat. A kutatáshoz szükséges a légi felvételeket a 2012-es év kivételével a Földmérési és Távérzékelési Intézet (FÖMI) szolgáltatta 2013-ban. A 2012-es év ortofotóit a Eurosense Kft bocsájtotta rendelkezésünkre. 2007, 2011 és 2012 években 50 cm-es, 40 cm-es és 0,10 cm-es térbeli felbontású, 24 bites (természetes színes, valamint infravörös színes (CIR- Colour Infra Red)) légifelvételek készültek Vexcel UltraCam D (2007) kamerákkal, melyek fókusztávolsága 105,200 mm, valamint Vexcel UltraCam X (2011,2012) kamerákkal 100,500 mm-s fókusztávolságokkal. Az ortofotók méretaránya egységesen 1: 30 000 volt.



A kutatási területeken elhelyezkedő úttengelyek közül, csak a burkolt utakat mértük fel, mivel a szilárd burkolattal rendelkező utak esetén a geodéziai meghatározás egzaktabban végrehajtható.

Az vizsgált területeken felmért utak hossza összesen 124 km, ennek a fél-kinematikus mérési módszerrel történő meghatározása sok időt és költséget vett volna igénybe, így a mérést kinematikus módszerrel Trimble R6 kétfrekvenciás GPS vevővel végeztük.

A mérés során egy terepjáró tetején (szimmetria tengelyében) elhelyezett GPS vevő (rover) segítségével történt a felmérendő utak tengelyeinek meghatározása.” A felmérés előtt szükség volt a külpontossági elemek meghatározására, mivel a jármű nem az úttengelyben, hanem a menetiránynak megfelelő forgalmi sávban haladt a felmérés folyamán. A vevő tengelyének a felmérendő út szimmetria tengelyétől (felfestett felező vonaltól) való távolsága, valamint a vevő burkolattól való magassága határozta meg a külpontossági elemeket. Ezen elemeket mérőszalaggal megmértük és rögzítettük a GPS-ben. A mérés során a GPS, a vevő középpontjának (az autó szimmetria tengelye) pillanatnyi pozíciójára végezte a helymeghatározást, de a beállított külpontossági elemek felhasználásával a műszer folyamatosan javította ezen mért koordináta értékeket, és ezáltal számította az úttengelyre vonatkozó aktuális koordinátákat. Mivel minden egyes útvonal felmérése előtt a külpontossági elemeket csak egyszer mértük meg és állítottuk be a műszerünkben, így ezek a javítások csak egy átlagos értéket jelentettek, hiszen a forgalmi és egyéb okok miatt (az autó kigyózó mozgása, az út szélességeknek változása, a felező vonal felfestésének megléte, vagy hiánya miatt) folyamatosan változtak, ezért meg kellett győződni arról, hogy a vizsgálat eredményét a külpontossági elemek változásából adódó hibák érdemlegesen nem befolyásolják.” (Varga et. al.)

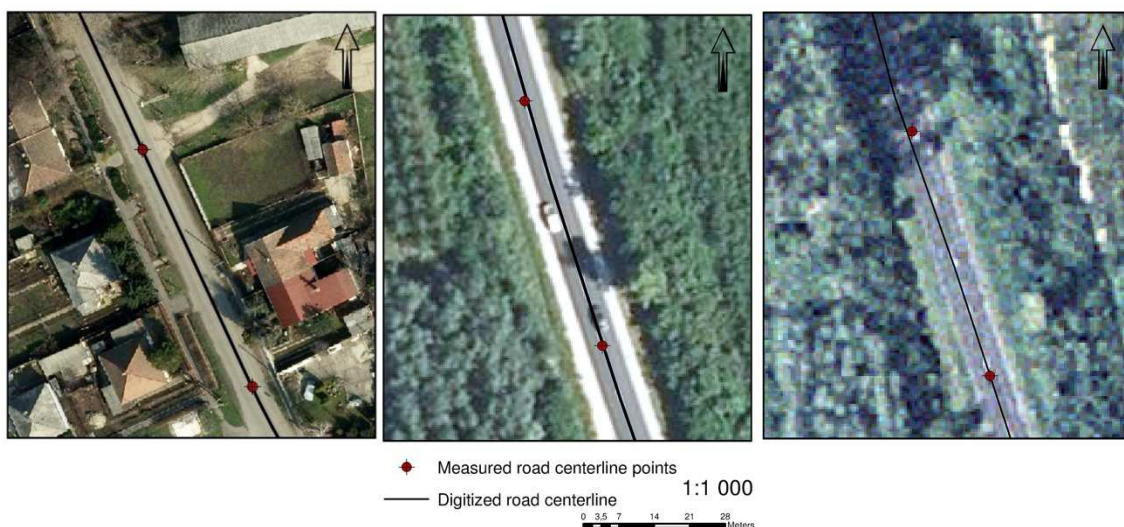
A kinematikus mérés pontosságát fél-kinematikus mérési módszerrel mért pontok meghatározásával ellenőriztük. A mérendő pontok távolságát 50 méterben határoztuk meg.

Ahhoz, hogy a kutatás eredményeinek alapját képező mérési eredmények pontossága is bizonyított legyen, szükség volt a felmérés során alkalmazott alappont hálózat valamint a használt műszer pontosságának ellenőrzésére is.

A felhasznált referencia hálózat pontosságának vizsgálatát a munkaterületen elhelyezkedő három OGPSH (országos GPS hálózat) ponton végeztük el. A műszer pontosságát úgy ellenőriztük, hogy a mért pontok 10 %-át más műhold geometria mellett újra meghatároztuk.

Az ortofotók digitalizálását 1:1000 méretarányban végeztük a burkolatokra festett felezővonalak mentén, ezek hiányában a szimmetria tengelyek kerültek meghatározásra. (2. ábra)

Megfigyelhető, hogy az első képen (0,1 m/pixel) és második képen (0,4 m/pixel) a digitalizált vonalak a terepen mért pontokon futnak, míg a harmadik képen (0,5 m/pixel) már érzékelhető a pontatlanság.



2. ábra. 0,1 méter/pixel, 0,4 méter/pixel felbontású és 0,5 méter/pixel felbontású ortofotók digitalizálása 1:1000-es méretarányban

A légi felvételek vektorizálása, valamint a terepi mérések feldolgozása, dokumentálása ITR5, ArcGIS és Microsoft Excel szoftverekkel történt. A digitalizált és mért vízszintes koordináták felhasználásával számítottuk az eltérések összegét, az eltérések négyzetének összegét, az átlagos eltérést, a Gauss-féle négyzetes eltérést, az eltérések szórását az eltérések mediánját, minimális, maximális eltéréseket, a hibaterjedelmet. A statisztikai számításaink során két mintás T próbát és F próbát alkalmaztunk.

3. Eredmények

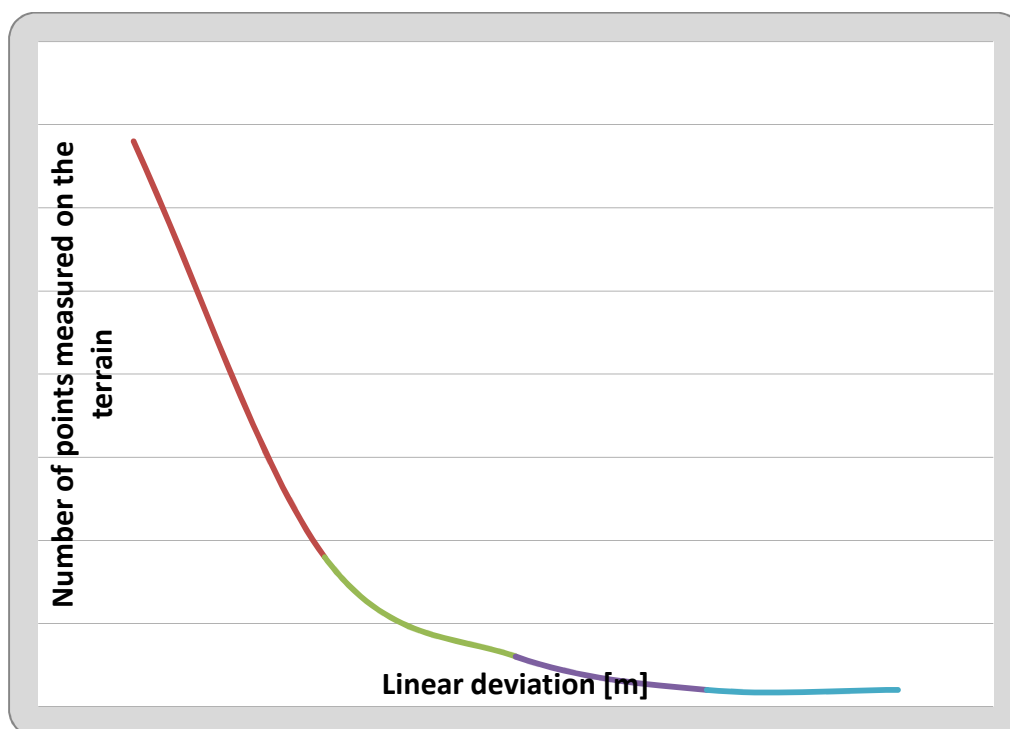
A referencia hálózat megbízhatóságának vizsgálatához a kutatási területen lévő 3 alappontra történtek ellenőrző mérések, melyeknek eredményeit a 1. táblázat tartalmazza. A dx és dy koordináta eltérések átlagos értéke ± 3 cm-en belül volt.

OGPSH pontok	Y adott	X adott	Y mért	X mért	dy (cm)	dx (cm)
79-3451	835459,79	260606,73	835459,80	260606,75	1	2
79-4122	835684,94	269784,65	835684,89	269784,65	3	2
79-4338	846248,24	257514,30	846248,29	257514,25	2	5
Az eltérések átlaga:					2	3

1. táblázat. Számított koordináta eltérések az Országos GPS Hálózat (OGPSH) pontjai alapján.

Azért választottuk a részletmérés módszerül a kinematikus mérést, mert egyrészt ez az egyik legköltséghatékonyabb terepi módszer. Mivel a kinematikus módszer a mérés eredményeit jelentősen befolyásolja, ezért a kinematikus meghatározásunkat fél-kinematikus mérésekkel ellenőriztük. A fél-kinematikus mérés jellemző ponthibája 1-2 cm, így a kinematikus mérés eredményeinek ellenőrzésére alkalmas módszer.

Az ellenőrző mérések során a pontok száma a teljes úthálózatra 50 darab volt. Az ellenőrző mérések eredményei alapján megállapítható, eltérések 88 %-a 0-30 cm közötti intervallumba tartozik (3. ábra), a fennmaradó 12 %-ba a durva hibák tartoznak. Az összehasonlításból számított eltérések alapján (statikus, kinematikus mérés) megállapítható, hogy a mérési módszer pontossága az ortofotó vektorizálásának vizsgálatához megfelelő eredményeket szolgáltat, hiszen a vizsgált pontok túlnyomó része 30 cm alatti eltérést, tehát az ortofotó felbontása alatti értéket mutat. Ezért a vizsgálat során a kinematikus módszerrel meghatározott, és az adott útvonalra vonatkozó átlagos külpontossági elemekkel megjavított koordináta értékeket tekintjük az úttengely mért koordinátáinak a továbbiakban. (Varga et. al.)



3. ábra. Vizsgált úttengely pontok és az ellenőrző pontok közötti eltérés.

A lineáris eltérések bemutatására 20 cm intervallumú kategóriákat határoztunk meg. Ennek alapján a vizsgált terepi pontok besorolásához 15 kategóriára volt szükség. (2. táblázat)

A 2. táblázat alapján megállapítható, hogy a 0,6 m alatti eltérések 3 kategóriába tartoznak, ezen eltérések gyakorisága 0,1 méteres felbontás esetén 100%, 0,4 méteres felbontás esetén 92,06%, 0,5 méteres felbontás esetén 90,75%. Az 1 métert meghaladó eltérések a nagy felbontástól a kis felbontás felé haladva a vizsgált pontok 0%-át, 2,3%-át és 1,38%-át teszik ki.

A terepi pontok 0,1 méter / pixel felbontás esetén 100%-a, 0,4 méter / pixel felbontás esetén 52%-a és 0,5 méter / pixel felbontás esetén 47%-a 20 cm alatti eltérést mutat. Megállapítható, hogy 0,4 és 0,5 m felbontások esetén a lineáris eltérések 80%-a a légi felvétel pixel méretén aluli hibát mutat.

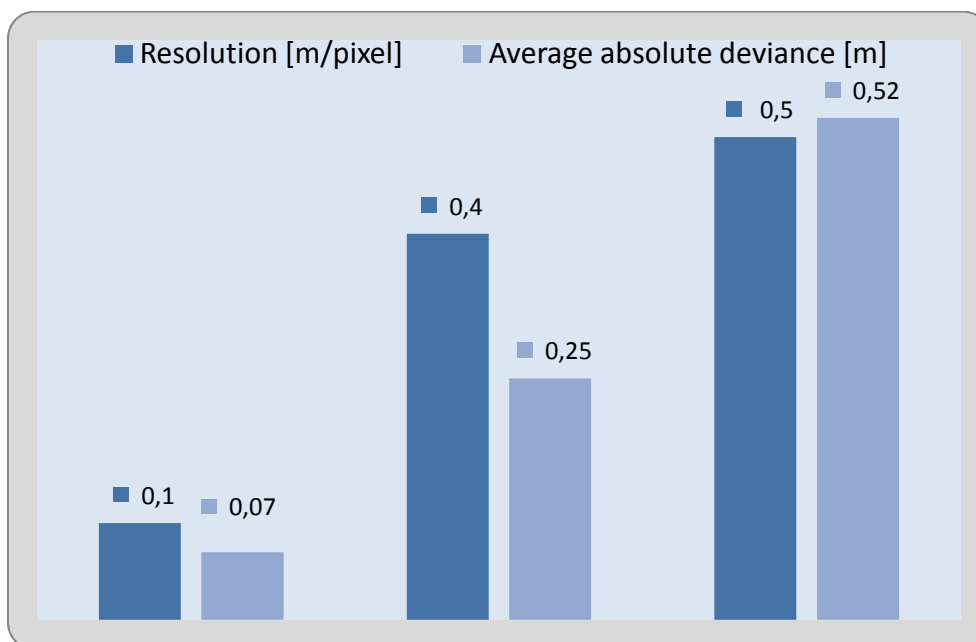


Kategóriák sorszámai	Az eltérések osztályokba sorolása (méterben)	Az eltérések gyakorisága 0,1 méteres felbontás esetén (%-ban)	Az eltérések gyakorisága 0,4 méteres felbontás esetén (%-ban)	Az eltérések gyakorisága 0,5 méteres felbontás esetén (%-ban)
1.	$0 < 0,2$	100,00	52,12	46,52
2.	$0,2 < 0,4$	0	28,32	29,67
3.	$0,4 < 0,6$	0	11,62	14,56
4.	$0,6 < 0,8$	0	3,78	5,40
5.	$0,8 < 1,0$	0	1,86	2,47
6.	$1,0 < 1,2$	0	1,38	0,92
7.	$1,2 < 1,4$	0	0,46	0,37
8.	$1,4 < 1,6$	0	0,28	0
9.	$1,6 < 1,8$	0	0,09	0
10.	$1,8 < 2,0$	0	0,09	0,09
11.	$2,0 < 2,2$	0	0	0
12.	$2,2 < 2,4$	0	0	0
13.	$2,4 < 2,6$	0	0	0
14.	$2,6 < 2,8$	0	0	0
15.	$2,8 < 3,0$	0	0	0
Összesen:		100 %	100 %	100 %

2. táblázat. A 2011 évi 0,4 méter / pixel felbontású ortofotó, a 2006 évi 0,5 méter/pixel felbontású ortofotó, a 2013 évi 0,65 méter/pixel felbontású úrfelvétel és a terepi felmérés vektorai közötti lineáris eltérések az I. kutatási területen.

A relatív gyakoriság ábrázolása alapján (melyik osztályba a minták hány %-a tartozik) megállapítható, hogy minden mintánk olyan jellegű, ahol az egyre nagyobb eltérésekhez egyre kisebb gyakoriságok tartoznak.

Szórásanalízissel megvizsgáltuk, hogy a 0,1 a 0,4 és 0,5 pixel/méter felbontásoktól függ-e az átlagos abszolút eltérések nagysága. A munkánk során alkalmazott egy szempontos varianciaanalízis a kétmintás t-próba általánosítása több független csoport esetére, tehát a várható értékeket hasonlítja össze, mégpedig a teljes variancia felbontásával. A próbastatisztikával a három különböző felbontásra számolt F érték lényegesen nagyobb, mint a kritikus érték, így a három minta átlagos abszolút eltéréseinek várható értéke nem tekinthető azonosnak, tehát az átlagos abszolút eltérések mértéke láthatóan függ a felbontás nagyságától. (4. ábra).



4. ábra. Vizsgált úttengely pontok és az ellenőrző pontok közötti eltérések (méterben) 0,1m/pixel (1), 0,4m/pixel (2) és 0,5 m/pixel (3) felbontású ortofotók esetén

Megállapítható, hogy az úttengelyek meghatározásának pontossága 0,1 és 0,4 méter/pixel felbontások esetén a pixel méretén aluli hibát mutat, 0,5 méteres felbontásnál ez az érték a pixel mérettel azonosnak tekinthető. (3. táblázat)

	0,4 m/pixel 2011 évi ortofotó	0,5 m/pixel 2006 évi ortofotó	0,1 m/pixel 2012 évi ortofotó
A minta átlaga: (m)	0,07	0,25	0,52
Eltérések szórása (m)	0,04	0,24	0,44
Eltérések mediánja (m)	0,06	0,19	0,40
Maximális eltérés (m)	0,19	1,84	2,91
Minimum eltérés (m)	0,00	0,00	0,00

3. táblázat. Összefoglaló adatok.

4. Összegzés

Vizsgáltuk, hogy milyen eltérések adódnak egy ortofotóról meghatározott vektoros állomány és geodéziai módszerrel meghatározott vektoros állomány között. Az ortofotókról digitalizált vektoros állományok illetve a geodéziai módszerrel felmért vektoros állományok összehasonlítása alapján kimutattuk, hogy az egyre nagyobb eltérésekhez egyre kisebb gyakoriságok tartoznak. Igazoltuk, hogy a vonalak digitalizálásának pontossága függ a felbontástól. A pontatlanság folyamatosan nő minél kisebb felbontású ortofotót használunk. A vizsgálat során továbbá megállapítottuk, hogy az úttengelyek meghatározásának pontossága 0,1



és 0,4 méter/pixel felbontás esetén a pixel méretén aluli hibát mutat, 0,5 méteres felbontásnál ez az érték a pixel mérettel azonosnak tekinthető.

Kimutattuk, hogy a vektorizálással párhuzamosan minden esetben szükség van terepi ellenőrző mérésekre, mely mérések alapján a digitalizálás durva hibái kiszűrhetők.

Irodalomjegyzék

- [1] H. Akdeniz, *The Opportunities That Digital Orthophotos Can Supply In Urban Planning*, XXth ISPRS Congress, 12-23 July 2004, İstanbul, PS WG VII/4, Available from: <http://www.isprs.org/istanbul2004/comm7/papers/112.pdf>
- [2] A. Alexandrov, T. Hristova, K. Ivanova, M. Koeva, T. Madzharova, V.H. Petrova, *Application Of Quickbird Satellite Imagery For Updating Cadastral Information*, Xth ISPRS Congress, 12-23 July 2004, İstanbul, Commission II, Available from: <http://www.isprs.org/istanbul2004/comm2/papers/160.pdf>
- [3] E. Ayhan, Ö. Erden, G. Atay, E. Tunç. PS 5.8 – *Photogrammetry and Remote Sensing*, Shaping the Change XXIII FIG Congress Munich, Germany, October 8-13, 2006.
- [4] G. Bakó, *Multispektrális felvételek alapján készülő tematikus térképek minősége, a terepi felbontás és a képminőség függvényében*, Tájökológiai lapok, vol.: 2010/8. 3. sz. pp.: 507-522.
- [5] G. Bakó, *Igen nagyfelbontású légifelvétel-mozaikok készítése kis- és középformátumú fényképezőgépekkel*, Geodézia és kartográfia 2010/6 LXII. p. 21-29,49.
- [6] J. Greenfeld, *Evaluating the Accuracy of Digital Orthophoto Quadrangles (DOQ) in the Context of Parcel-Based GIS*, PHOTOGRAMM ENG REM S. 2001; 67 (2): 199-205.
- [7] J. Hokle, *Experiences with the Production of Digital Orthophotos*, PHOTOGRAMM ENG REM S. 1996; 62 (10):1189-1194.
- [8] D. Klang, *Automatic detection of changes in road databases using satellite imagery*, IAPRS Vol. 32/4, ISPRS Commission IV Symposium on GIS – Between Visions and Applications. Stuttgart, 1998. p.293-298.
- [9] G. Manzer, *Avoiding Digital Orthophoto Problems*, *Digital Photogrammetry: An Addendum to the Manual of Photogrammetry*, American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Bethesda, Maryland, pp. 158-162. 1996.
- [10] J.B. Mena, J.A. Malpica, *An automatic method for road extraction in rural and semi-urban areas starting from high resolution satellite imagery*, PATTERN RECOGN LETT 2005;26(9):1201-1220.
- [11] F.J. Mestas-Carrascosa, I.C. Rumbao, J.A. Barrera Berrocal, A. García-Ferrer Porras, *Positional Quality Assessment of Orthophotos Obtained from Sensors Onboard Multi-Rotor UAV Platforms*, doi:10.3390/s141222394, 2014.



- [12] JY. Rau, NY. Chen, LC. Chen, *True Orthophoto Generation of Built-Up Areas Using Multi-View Images*, PHOTOGRAMM ENG REM S. 68(6),581-588, 2002.
- [13] A. T. Rossi, *Application Of Digital Photogrammetric Methods In The Of Land Cover Change On The Coastal Dunes Of Warren Dunes State Park, Berrien Country* [Master Thesis], Michigan: The Michigan State University; 2004.
- [14] S. Tayfur, *Investigating The Accuracies Of Digital Orthophoto Maps Producted at Different Regions* [Master Thesis], Trabson: The Graduate School of Natural and Applied Sciences; 2004.
- [15] MJ. Smith, DG. Smith, DG. Tragheim, M. Holt, *DEMS And Ortho-Images From Aerial Photographs*, PHOTOGRAMM REC. 1997; 15: 945-950.
- [16] G. Szabó, *Az ASTER GDEM adatbázis pontosságának vizsgálata egy hazai mintaterületen*, Térinformatikai konferencia és szakkiállítás Debrecen II. pp. 421-427, 2011.
- [17] Zs. Varga, I. Bíró J, *A Hajdúhát területről készült légi felvétel és topográfiai térkép pontosságvizsgálata, erdőhatárok geodéziai felmérése alapján*, Térinformatikai konferencia és szakkiállítás Debrecen IV. 481-488, 2013.
- [18] Varga et. al., *Ortofotó pontossági vizsgálata geodéziai felmérés alapján*, Geodézia és Kartográfia 2014 (7-8 szám) LXVI évfolyam (HU ISSN 0016-7118) 8-12, 2014.



A gazdasági folyamatok matematikai modellezésének módszertana

CZINEGE E., KÉZI Cs.

University of Debrecen, kezicsaba@science.unideb.hu

University of Debrecen, czinege.edina@gmail.com

Abstract. In economics very important the applications of the mathematical methods. In this paper we look more applications of calculus and linear algebra to economics.

Bevezetés

Egy cég optimális működéséhez elengedhetetlen és nélkülözhetetlen, hogy a közgazdaságtan mélyebb rejtelmeit is megismerjük. Azonban könnyen észrevehetjük, hogy a mélyebb gazdaságtani összefüggések megértéséhez komoly matematikai eszközrendszer ismerete szükséges. Éppen ezért a gazdasági matematika rendkívül fontos szerepet tölt be mind az oktatásban, mind pedig egy cég életképes működésében.

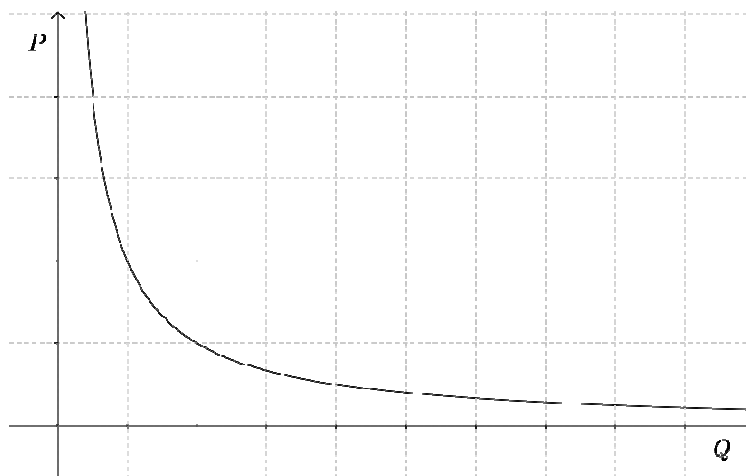
A következőkben ismertetni fogjuk azokat az alapvető közgazdaságtani fogalmakat, amikre a későbbiekben hivatkozni szeretnénk, majd rávilágítunk arra, hogy a mérésekkel meghatározott „diszkrét” alakzatok „folytonossá” való kiterjesztése kulcsfontosságú szerepet játszik a gazdasági folyamatok leírásában.

1. Közgazdaságtani fogalmak

1.1. Keresleti függvény

Egy termék ára (P) és a keresett mennyiség (Q) közötti kapcsolatot mutatja, feltételezve, hogy egyéb a keresletet befolyásoló tényezők változatlanok.

Egy tipikus keresleti függvény olyan, hogy ha egy bizonyos termék ára megnő, akkor az iránta való kereslet csökken, azaz egy tipikus keresleti függvény monoton csökkenő. Természetesen léteznek kivételek is, amikor az ár függvényében nem csökken, hanem éppen, hogy nő a kereslet (pl. „divatcikk” esetén).

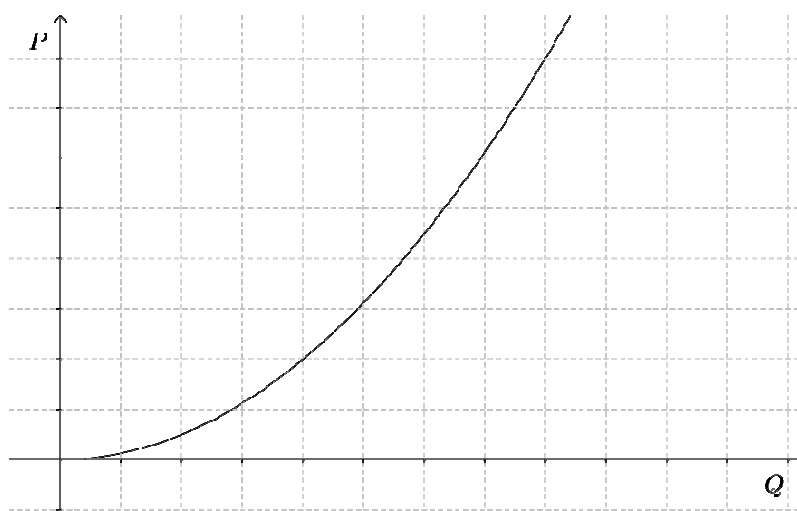


1. ábra. Keresleti függvény.

1.2. Kínálati függvény

A kínálati függvény megmutatja, hogy a termelők különböző árak mellett milyen árumennyiséget kínálnak eladásra a piacon.

A termék árának csökkenésével a kínált mennyiség is csökken, azaz a kínálati függvény monoton növekvő.

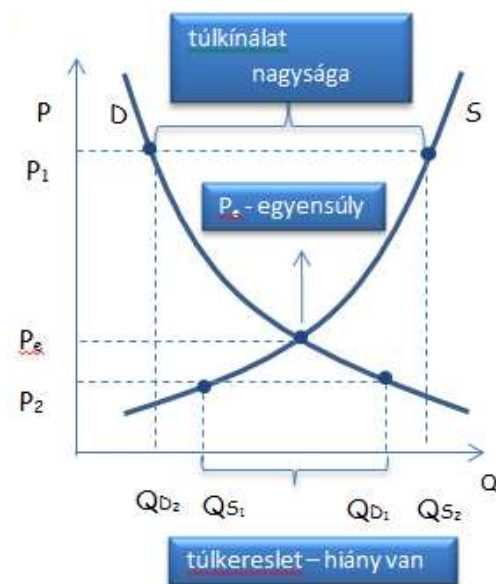


2. ábra. Kínálati függvény.

1.3. Egyensúlyi ár

Az egyensúlyi ár meghatározása két függvény, a kínálati és keresleti függvény közös pontjának (metszéspontjának) meghatározása, amely egy egyenlet megoldását jelenti.

Az egyenlet megoldásaként megkapjuk az egyensúlyi mennyiséget, majd ha vesszük a kapott helyen akár a keresleti függvény, akár a kínálati függvény helyettesítési értékét (hiszen az említett helyen a két függvény helyettesítési értéke megegyezik), akkor megkapjuk az egyensúlyi árat.



3. ábra. Egyensúlyi ár, egyensúlyi mennyiség.

Előforduló matematika probléma: az egyenlet megoldásának nehézsége (bonyolultsága) a keresleti és kínálati függvények bonyolultságától függ. Könnyen előfordulhat, hogy elemi eszközökkel nem tudjuk megoldani a kapott egyenletet. Ilyenkor vagy numerikus matematikai eszközökkel megkeressük az egyenlet közelítő megoldását, vagy valamilyen matematikai szoftver segítségével oldjuk meg az egyenletet.

1.4. Elaszticitás

A keresleti és bevételi függvények vizsgálatát tekintve, természetesen nem mindegy, hogy milyen „mértékben” változik a kereslet az ár függvényében. Így jutunk el az elaszticitás, azaz jövedelem rugalmasság fogalmához.

Az elaszticitás megmutatja, hogy ha egy függvény változójának értékét 1%-al növeljük, akkor hány %-al változik a függvény érték.

Kiszámolása:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Gondoljunk például arra, hogy attól függetlenül, hogy ha egy só árát a felére leszállítják, még nem biztos, hogy többet vásárolunk belőle, azonban ha egy csokoládét leáraznak az eredeti ár felére, akkor már valószínűbb, hogy több fog belőle fogyni, mint eredetileg.



Amennyiben $f(x)$ egy keresleti függvény, úgy az elaszticitás megmutatja, hogy ha 1%-al változik az adott jószág ára, akkor hány %-al változik az adott jószág iránti kereslet mennyisége.

Ha $0 < |E(x)| < 1$, akkor rugalmatlan, ha $|E(x)| = 1$, akkor egységnyi rugalmasságú, ha $|E(x)| > 1$, akkor rugalmas függvényről beszélünk.

2. Egy emelt szintű érettségi feladat nyomán

Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést:

- 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet;
- 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyiszor 400 Ft-tal csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

a) Adjuk meg annak a B függvénynek az a hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételét jelöli x utassal indított járat esetén!

b) Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát!

c) Adjuk meg, hogy hány utas esetén lesz a repülő társaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

A feladat megoldása:

a) Ha $10 \leq x \leq 20$ és x egész szám, akkor $B(x) = 16.000x$. Ha $20 < x \leq 36$ és x egész szám, akkor

$$B(x) = 16.000x - 400(x - 20)x = -400x^2 + 24.000x.$$

Vezessük be az U és V halmazokat az alábbi definícióval:

$$U = \{x \in \mathbb{N} | 10 \leq x \leq 20\} \quad V = \{x \in \mathbb{N} | 21 \leq x \leq 36\}.$$

Ennek megfelelően a függvény leképezési szabálya

$$B(x) = \begin{cases} 16.000x, & \text{ha } x \in U \\ -400x^2 + 24.000x, & \text{ha } x \in V \end{cases}.$$

b)c) A kapott függvény az egész számok halmazának egy részhalmazán van értelmezve, így nem differenciálható, ezért a bevételi függvény értelmezési tartományát (átmenetileg) terjesszük ki oly módon, hogy $U^* = [10; 20]$ és $V^* = [20; 36]$ legyen.

Az U^* tartományon a maximumérték az U halmaz egyik határpontjában van: $16.000 \cdot 20 = 320.000$. A V^* tartományon a deriváltfüggvény $-800x + 24.000$, amelynek zérushelye $x = 30$ -nál van. A B függvény V^* -ra való leszűkítése egy „lefelé nyíló” parabola, így a stacionárius helye globális maximum hely is egyben. A maximum érték:



$$B(30) = -400 \cdot 30^3 + 24.000 \cdot 30 = 360.000.$$

A B függvény globális szélsőérték helyeként egész számot kaptunk, így a kapott érték az eredeti halmazon értelmezett függvénynek is szélsőérték helye.

Mivel $B(20) = 320.000 < 360.000 = B(30)$, ezért a B függvény maximumhelye $x = 30$, maximum értéke $B(30) = 360.000$. A kapott maximum hely az eredeti értelmezési tartománynak is eleme, azaz $30 \in U \cup V$, következésképpen 30 utas esetén lesz maximális a bevétel, és az elérhető legnagyobb bevétel 360.000 forint.

Megjegyezzük azonban azt, hogy a függvényünk az egész számok halmazán volt értelmezve, így azt is megtehettük volna, hogy minden egyes pontba kiszámoljuk a függvény értékeit és kiválasztjuk a kapott pontsor maximumát, azonban ennek a módszernek a hátrányait is látnunk kell, nevezetesen, hogy ugyan nem kíván a módszer semmilyen magasabb szintű matematikai ismeretet, azonban a számolási igény már kevés pont esetén is meglehetősen nagy, ezért azáltal, hogy az egész számok halmazán értelmezett függvényt kiterjesztettük a valós számok halmazának egy részhalmazára, jelenősen megrövidítettük a számolást.

3. Egy összetettebb feladat és megoldásának ismertetése

Tudjuk, hogy egy bizonyos termék esetén, ha az ára 180 Ft, akkor 100 darab fogy belőle, ha 100 Ft, akkor 200 darab, ha 60 Ft, akkor 300 darab.

a) Adjuk meg az adatokat „négyzetesen legjobban közelítő”

$$f(x) = a + \frac{b}{x}$$

függvény ismeretlen paramétereit.

b) Vizsgáljuk meg a kapott függvény keresleti függvény elaszticitását! Hogyan változik a kereslet, ha a 120 Ft-os termék árat 3%-al növeljük.

c) Határozzuk meg az egyensúlyi mennyiséget és az egyensúlyi árat

$$g(x) = 20 + 2x$$

kínálati függvény esetén!

A feladat megoldása:

Első lépésben előállítjuk a feladat feltételeinek megfelelő keresleti függvényt, azaz keressük azt az

$$f(x) = a \cdot x^0 + b \cdot \frac{1}{x}$$

függvényt, amely a (100; 180), (200; 100), (300; 60) pontokhoz (a továbbiakban alappontok) „legközelebb” helyezkedik el, azaz, úgy szeretnénk meghatározni a paramétereket, hogy az alappontoknak a megfelelő függvényértékektől való eltéréseinek négyzetösszege minimális



legyen. A feladat megoldására többféle lehetőségünk van. Az egyik az, hogy az $f(x)$ függvényt az x^0 és az $\frac{1}{x}$ függvények lineáris kombinációjaként tekintjük, majd az ismeretlen paraméterek (a és b) meghatározásához megoldjuk az úgynevezett Gauss-féle normál-egyenletrendszert:

$$A^T \cdot A \cdot \bar{x} = A^T \cdot \bar{f}$$

Ez egy inhomogén lineáris egyenletrendszert, ahol az A mátrix első, illetve második oszlopa az x^0 , illetve az $\frac{1}{x}$ függvény helyettesítési értékei rendre alappontok első koordinátáinak helyén, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 100^0 & \frac{1}{100} \\ 200^0 & \frac{1}{200} \\ 300^0 & \frac{1}{300} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{100} \\ 1 & \frac{1}{200} \\ 1 & \frac{1}{300} \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva az A mátrix transzponáltja $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{200} & \frac{1}{300} \end{pmatrix}$, így az $A^T \cdot A$ szorzás eredménye:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{11}{600} \\ \frac{11}{600} & \frac{49}{360.000} \end{pmatrix}.$$

Az $\bar{f}$ vektor az alappontok második koordinátáiból álló vektor, azaz

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} 180 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}, \text{ így } A^T \cdot \bar{f} = \begin{pmatrix} 340 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Az x vektor a keresett függvényben szereplő ismeretlen együtthatókat tartalmazza, azaz

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

A fentiek felhasználásával az említett Gauss-féle normál-egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{11}{600} \\ \frac{11}{600} & \frac{49}{360.000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 340 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

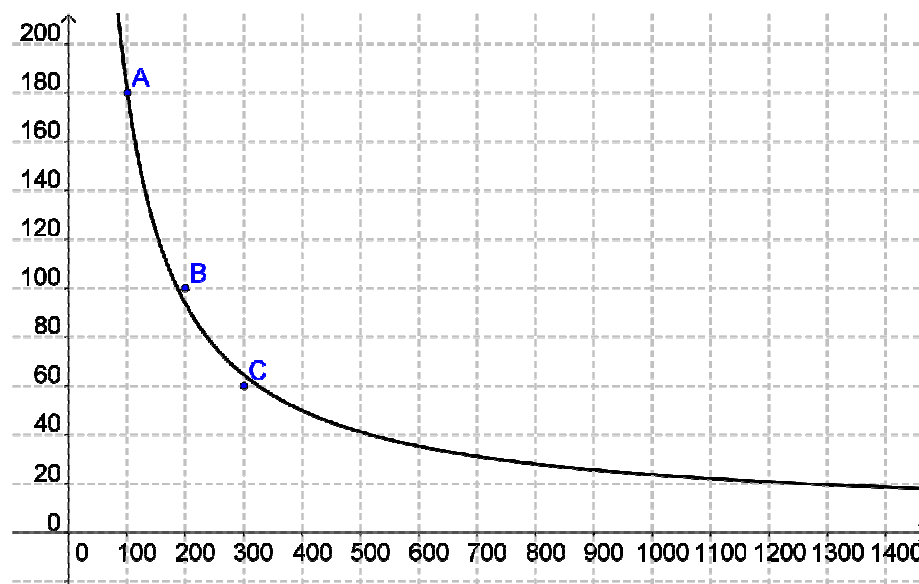
azaz részletesen kiírva az egyenleteket:

$$\left. \begin{aligned} 3a + \frac{11}{600}b &= 340 \\ \frac{11}{600}a + \frac{49}{360.000}b &= \frac{5}{2} \end{aligned} \right\}$$

adódik. Látható, hogy az egyenletrendszer lineáris, melynek az alaplátrixának a determinánsa nem nulla, így megoldható például inverzmátrix-módszerrel vagy Cramer-szabállyal. Az ismeretlenekre együtthatókra

$a = \frac{80}{13} \approx 6,15$ és $b = \frac{228.000}{13} \approx 17538$ adódik. Tehát a keresett függvény:

$$f(x) = \frac{80}{13} + \frac{228.000}{13} \frac{1}{x}.$$



4. ábra. A keresleti függvény a meghatározott paraméterekkel.

b) A keresleti függvény elaszticitás függvénye:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x),$$

ami jelen esetben

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x \left(\frac{-228.000}{13x^2} \right)}{\frac{80}{13} + \frac{228.000}{13x}} = \frac{-228.000}{13x} \cdot \frac{13x}{80x + 228.000} = \frac{-228.000}{80x + 228.000}.$$

Ha $x = 120$, akkor $E(120) \approx -0,96$, ami azt jelenti, hogy ezen a helyen a keresleti függvény rugalmatlan.

c) A feladat feltételei szerint ugyanezen termékhez tartozó kínálati függvény:

$$g(x) = 20 + 2x.$$

A következőkben meghatározzuk az egyensúlyi árat. Ehhez meg kell oldanunk az $f(x) = g(x)$ egyenletet:

$$\frac{80}{13} + \frac{228.000}{13x} = 20 + 2x.$$

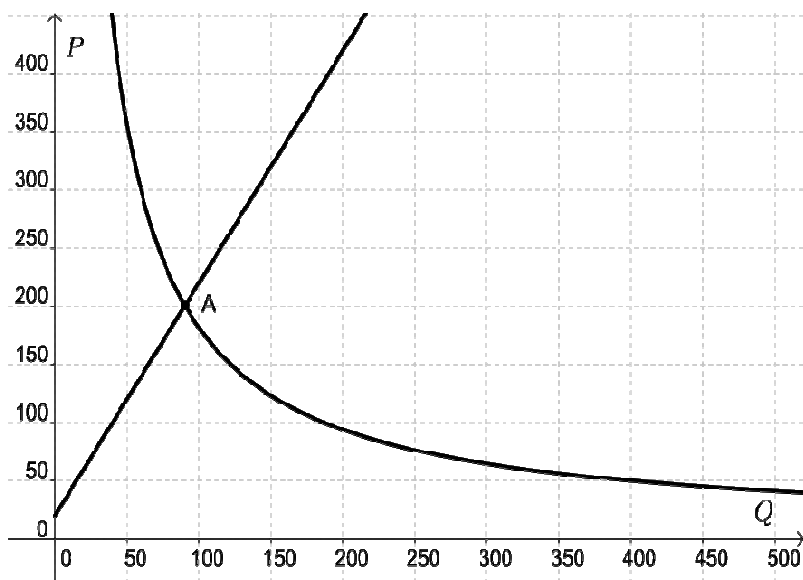
Mindkét oldalt megszorozva a közös nevezővel

$$3200x + 9.120.000 = 10.400x + 39x^2$$

adódik. Ha az egyenletet 0-ra redukáljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$13x^2 + 90x - 114.000 = 0.$$

Egyszerűsítve, majd alkalmazva a másodfokú egyenlet megoldó képletét $x_1 = -97,17$ és $x_2 = 90,25$ adódik. Mivel $x > 0$, ezért az egyensúlyi árhoz tartozó kereslet $x = 90$ darab, az egyensúlyi ár $g(90) \approx 200$.



5. ábra. Az egyensúlyi mennyiség és az egyensúlyi ár szemléltetése.

Irodalomjegyzék

- [1] <http://www.oktatas.hu/koznevelas/erettsegi/feladatsorok>
- [2] E. Zalai, *Matematikai közgazdaságtan I*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2011.
- [3] K. Sydsaeter, P. I. Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula Kiadó, 1998.



Játék- és döntésmélet a közgazdaságtanban

KOVÁCS A., KÉZI Cs.

University of Debrecen, kovanna93@gmail.com

University of Debrecen, kezicsaba@science.unideb.hu

Abstract. The game theory and the decision theory are very new sectors of mathematics. Given the long history of mathematics, and the longer history of human conflict, the mathematical theory of conflict known as game theory is a surprisingly recent creation. John von Neumann published the fundamental theorem of two-person zero-sum games in 1928, but at that time it was simply a theorem in pure mathematics. The theory which provided a broader intellectual context, game theory, was begun in an intense period of collaboration between von Neumann and the economist Oskar Morgenstein in the early 1940s. The decision theory is very important in economics. Decision theory has developed rapidly since the early 1950s. Decision theory related to the field of game theory. Decision theory is concerned with the choices of individual agents whereas game theory is concerned with interactions of agents whose decisions affect each other.

Bevezetés

Mind a játékelmélet, mind a döntésmélet meglehetősen új ágai a matematikának. Az utóbbi időben azonban egyre kutatottabb területté váltak, ugyanis egy gazdasági rendszer működési folyamatában központi szerepet töltenek be az ilyen irányú vizsgálatok.

A játékelmélet és a döntésmélet filozófiája között az egyik és talán a legfontosabb különbség, hogy a míg játékelméletben több szereplő vesz részt, addig a döntésméletben egyetlen szereplő hozza meg a számára legoptimálisabb döntést.

1. Játékelmélet

A *játékelméletet* precízen úgy definiálhatjuk, hogy a racionális szereplők stratégiai interakcióinak elemzése. Ezen definícióban azonban néhány dolgot meg kell magyaráznunk:

- interakció: legalább egy játékos döntései közvetlenül befolyásolják egy másik játékos magatartását;
- racionalitás: az egyes játékosok (a számukra) legjobb cselekvést választják.

A játékelmélet, mint a matematika ága, viszonylag új, de az utóbbi időben aktívan kutatott terület. Kialakulását tekintve –közgazdasági szempontból– már Adam Smith munkásságában történtek utalások (Láthatatlan kéz című értekezés), azonban korántsem jelent tudományos megközelítést, értelmezést. Az emberek már a reneszánsz korban kezdték elemezni a véletlen



alapuló játékokat, de csak a XX. században kezdtek el olyan stratégiai játékokkal foglalkozni, melyekben a véletlennek egyáltalán nincs, vagy elhanyagolható a szerepe.

1928-ban Neumann János bizonyítást adott úgynevezett minimax tételére, melyben leírja, hogy az adott játékosnak mely stratégiát kell választania. Ezen elmélet azonban nem tűnt önmagában hasznosíthatónak, hiszen alkalmazása nem volt egyértelmű. Oskar Morgenstein felismerte a téma közgazdasági hasznosságát, így eredményeiket több évnyi közös munka után publikálták.

Kétféle játékot különböztetünk meg: szerencsejátékot és stratégiai játékot. A szerencsejátékok matematikai vizsgálata első sorban valószínűségszámítási eszközökkel történik. A stratégiai játékok kimenetelére a játékosoknak a fennálló játékszabályok keretei között van befolyásuk. Tárgyalásukhoz a matematika számos területére szükség van. A játékokra konfliktusok jellemzők. Minden játékos érdeke, hogy biztosítsa maga számára a játék előnyös kimenetelét.

A résztvevők számának megfelelően beszélhetünk két, három illetve n -személyes játékokról, azonban a „személy” elnevezés nem feltétlenül egyént jelöl. Jelenthet valamilyen vállalatot, vállalati csoportosulást is.

A játékos általában több stratégia közül választhat. Ezen stratégiák együttesét a játékos stratégiahalmazának nevezzük. Zermelo tétele szerint: egy kombinatorikus játékban vagy valamelyik félnek van nyerő stratégiája, vagy mindkettőnek van döntetlen stratégiája.

A játékoknak két nagy csoportját különböztetjük meg:

- determinisztikus játék: ha a játékosok által választott stratégiák a játék kimenetelét egyértelműen meghatározzák (például a sakk);
- sztochasztikus játék: ha a játék kimenetelét csak bizonyos valószínűséggel határozzák meg a választott stratégiák (például a lottó).

2. Egy játékelméleti feladat

Két vállalat versenyez egymással, A és B. Termékeiket 100, illetve 150 forintos áron értékesíthetik, ennél az árnál a vállalatok profitja $2x$. Ha ezt megosztják, akkor mindkét vállalat profitja x ; x . Ha az egyik vállalat ára 100, a másiké 150, akkor az előbbi a profit egy részét elhalássza és az olcsóbb megszerzi a másik piaci részesedését. Amelyik vállalat tehát nagyobb profitot határoz meg, az veszít. Tehát a játék kifizetési mátrixa

$$\begin{pmatrix} (A|B) & 100 & 150 \\ 100 & (x|x) & (1,5x|0,5x) \\ 150 & (0,5x|1,5x) & (0,5x|0,5x) \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy mindkét cég a saját nyereségének maximalizálásra törekszik. (Ez egy kézenfekvő feltétel.) Egy cégnek két lehetősége van: 100, vagy 150 forintos áron értékesít. Mindkét választás eredménye függeni fog attól, mit tesz a másik cég, de egyikük sem tudja,



hogyan fog dönteni a másik. Még ha lehetőségük is lenne az összebeszélésre, akkor sem biztosan bízhatnának meg abban, hogy a másik megtartja az ígéretét. (A kémkedést kizárjuk.)

Ha az egyik vállalat arra számít, hogy a másik majd 150 forinton értékesít, akkor az optimális stratégia a 100 forint, hiszen ezzel elérhető a legnagyobb profit, miközben a másik semmit sem profitál. Amennyiben azt feltételezi, hogy a 100 forintos áron értékesít, akkor is az lesz a legjobb választás, ha ő is 100 forinton értékesít, hiszen így megúszhatja, hogy elveszítse a profit egy részét. Amennyiben persze mindketten 100 forinton értékesítenek, akkor mindketten profitálnak fele-fele alapon.

Mindképpen a 100 forint lesz a meghatározó stratégia mindkét résztvevő számára. Mindegy, hogyan dönt a másik játékos, a 100 forinttal elkerülhető a rosszabb lehetőség. A vállalat számára sajnálatos módon pont ez fog elvezetni ahhoz a szerencsétlen végkimenetelhez, hogy mindketten elveszítik a vásárlóikat.

Ha a csoport (azaz a két vállalat közös) érdekeit tekintjük, akkor a helyes stratégia a kooperáció, hiszen ez fogja a profitot maximalizálni. Bármely más döntés előnytelenebb lenne, ha a két vállalat együttes érdekeit vizsgáljuk.

3. Döntéselmélet

A döntést formális választást jelent alternatívák között. Az alternatíva legalább két különböző választási lehetőségre terjed ki. Egyetlen szereplő a számára leghatékonyabb döntést hozza meg.

Egy egyszerű példa: Ha Robinsont számúzik egy lakatlan szigetre. Két dolog közül választhat, hogy mit vihet magával. Iránytű vagy banán? A kérdésre a válasz kézenfekvő, az iránytű less számára hasznosabb a szigeten.

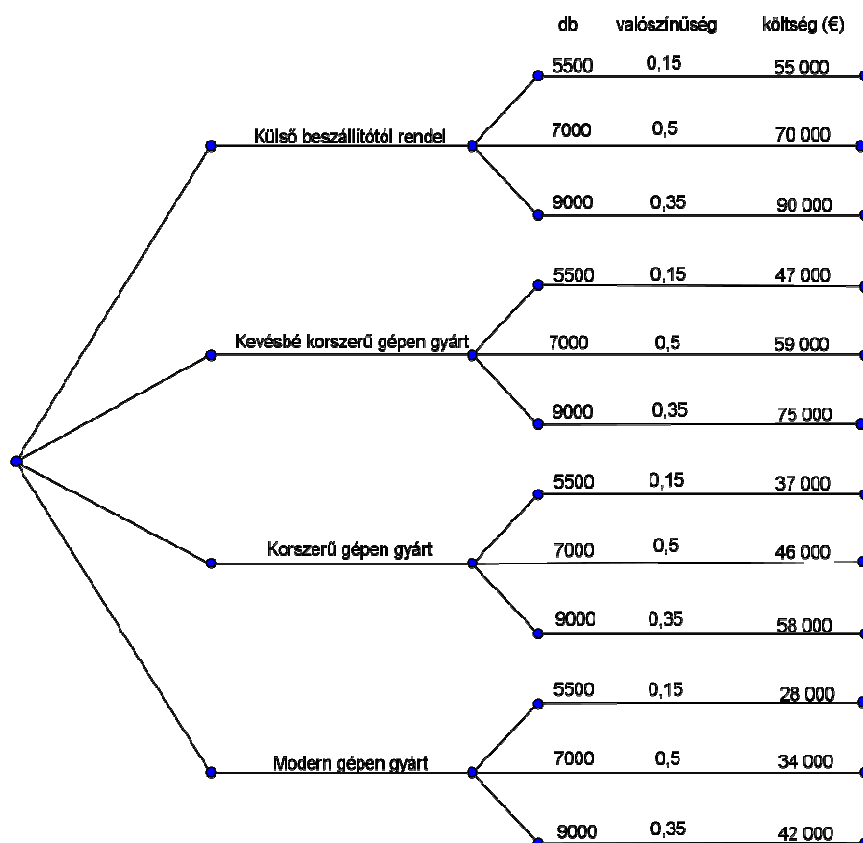
A döntéselméletben rendkívül fontos szerepe van a bizonytalanságnak, így matematikai eszközként a valószínűségszámításnak, a valószínűségi változóknak. Gondoljunk bele, hogy nemcsak olyan nyilvánvalóan kockázatos döntéseket kell a véletlennel számolnunk, mint a szerencsejáték, a tőzsdei befektetés vagy az életbiztosítás, hanem szinte minden döntésünk esetén. A biztosnak hitt állampapírokat is elértéktelenítheti egy infláció.

4. Egy döntéselméleti feladat

Egy vállalatnak döntenie kell, hogy egy bizonyos alkatrész értékesítése esetén külső cégtől rendelje-e meg, vagy saját maga gyártsa-e le. Ha legyártja, akkor 3 féle gépsor felvásárlása adódik lehetőségként: kevésbé korszerű, korszerű és modern gyártósor. Ha az alkatrészt megrendeli, akkor darabja 10 €-ba kerül. Ha a kevésbé korszerű gépet vásárolja meg és azzal gyárt, akkor a felmerülő költségek: fixköltség (a gyártósor ára) 3000 €, míg a változó költség 8 €/db. A korszerű géppel történő gyártás esetén a fix költség 4000 €, míg a változó költség 6€/db, valamint a modern gép gyártásával a fix költség 6000 € és 4 € a darabonkénti változó költség.

Közzvélemény kutatást végzett a cég annak felmérésére, hogy a következő egy évben várhatóan hogyan alakul a kereslete: 15 %-os valószínűséggel 5500 db, 50 %-os valószínűséggel 7000 db, 35 %-os valószínűséggel pedig 9000 db terméket tud értékesíteni a következő évben.

Felrajzoljuk a rendelkezésre álló információ alapján a döntési fát, majd megadjuk a döntési probléma megoldását:



A várható költségek:

- Külső beszállítótól való rendelés esetén:

$$E(\xi_1) = 0,15 \cdot 55.000 + 0,5 \cdot 70.000 + 0,35 \cdot 90.000 = 74.750$$

- Kevésbé korszerű gép gyártásával:

$$E(\xi_2) = 0,15 \cdot 47.000 + 0,5 \cdot 59.000 + 0,35 \cdot 75.000 = 62.800$$

- Korszerű gép gyártásával:

$$E(\xi_3) = 0,15 \cdot 37.000 + 0,5 \cdot 46.000 + 0,35 \cdot 58.000 = 48.850$$

- Modern gép gyártásával:

$$E(\xi_4) = 0,15 \cdot 28.000 + 0,5 \cdot 34.000 + 0,35 \cdot 42.000 = 35.900$$

A minimális költségű értéket választjuk, a döntési probléma megoldása tehát: akkor döntünk jól, ha a modern géppel gyártjuk az értékesítendő alkatrészeket.



Irodalomjegyzék

- [1] J. Szép, F. Forgó, *Bevezetés a játékelméletbe*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [2] L. Mérő, *Mindenki másképp egyforma, a játékelmélet és a racionalitás pszichológiája*, Tercium Kiadó, Budapest, 1996.
- [3] S. Molnár, F. Szidarovszky, *Játékelmélet: Többcélú optimalizáció, konfliktuskezelés, differenciáljátékok*, ComputerBooks Kiadó Kft, Budapest, 2010.
- [4] Á. L. Kóczy, *A Neumann-féle játékelmélet*. Közgazdasági Szemle, LIII. évfolyam, 2006.
- [5] D. M. Kreps, *Játékelmélet és közgazdasági modellezés*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.
- [6] M. Motta, *Versenypolitika: Elmélet és gyakorlat*, Gazdasági Versenyhivatal Versenykultúra központ, Budapest, 2004.



A Debreceni Egyetem Műszaki Kar gólyáinak Excel ismerete

PRINCZ M.

University of Debrecen, pmaria@unideb.hu

Abstract. This survive examined the Excel knowledge of the first-year students at the start of their university studies at the University of Debrecen, Faculty of Engineering. We examined the students' practical knowledge of national curriculum. The results show a number of shortcomings. The decreasing number of hours spent on information technology as new national curriculum will effect falling knowledge of basic IT skills.

Keywords: University of Debrecen, Faculty of Engineering, Excel, survive

Bevezetés

A Debreceni Egyetem Műszaki Karán a *Mérnöki informatika I. c.* kurzus részeként tanulnak az első évfolyamon tanulók Excel táblázatkezelőt. Bár a gimnáziumokban és a szakközépiskolákban elvileg tananyag a táblázatkezelés, de a karon az a gyakorlati tapasztalat, hogy a hallgatók Excel ismeretei sok esetben nagyon hiányosak. Általában elmondható, hogy a tanulók informatikai ismeretei - a táblázatkezelést is beleértve - nagyon különbözőek: Vannak, akik gyakorlottak a különböző alkalmazói programok használatában, s vannak, akik a legalapvetőbb informatikai ismeretekkel, készségekkel sem rendelkeznek. Az Excel tanításánál az a célkitűzésünk, hogy valamennyi hallgató legalább középfokú érettségi szintjén elvártak szerint tudja alkalmazni a táblázatkezelést.

1. A felmérés

Az alábbi felmérés a DE Műszaki Kar első éves hallgatóinak Excel ismeretét vizsgálta az egyetemi tanulmányaik kezdetén. A felmérés 2013 szeptemberében készült, amelyen 43 hallgató vett részt. Ők a felhasználói tudás ellenőrzésére szolgáló gyakorlati feladatsort oldottak meg, amely a táblák formázására, a leggyakoribb függvények használatára, adattáblák rendezésére, szűrésére, diagramok készítésére kérdezett rá. A felmérésben a diákok anonim módon vettek részt.

A felmérés kezdetén az alábbi kérdéseket tettük fel a hallgatóknak:

- Tanult Excelt (vagy más táblázatkezelőt) az általános iskolában?



- Tanult Excelt (vagy más táblázatkezelőt) a középiskolában?
- Milyen típusú középiskolába járt?
- Hány éven át tanult informatikát a középiskolában?
- Érettségizett informatikából?

A 57%-a felelt arra a kérdésre igennel, hogy tanulta-e az általános iskolában az Excel táblázatkezelőt. Középiskolában a válaszok szerint 90% tanulta az Excelt. Gimnáziumba 70% (30 fő), szakközépiskolába 28% (12 fő) járt, 1 fő nem válaszolt a feltett kérdésekre. A választ adók 42%-a érettségizett informatikából.

A *Hány éven át tanult informatikát a középiskolában?* kérdésre a válaszokat az alábbi tábla tartalmazza:

1 éven át:	5 fő	12%
2 éven át:	17 fő	40%
3 éven át:	4 fő	9%
4 éven át:	16 fő	37%
nem válaszolt	1 fő	2%

A gimnáziumokban és a szakközépiskolákban is a kerettanterv [1] része 9-10 osztályban az informatika, ezen belül pedig az Adatkezelés, adatfeldolgozás, információmegjelenítés részben elvárás a

- *Problémamegoldás táblázatkezelővel*
- *Statisztikai számítások* (Statisztikai függvények használata táblázatkezelőkben, Az adatok grafikus szemléltetése)
- *Adatkezelés táblázatkezelővel* (Adatok rendezése, szűrés) [1]

A hallgatók 12%-a szerint a minimálisan elvárt 2 év helyett csupán 1 éven át tanultak informatikát, 8% szerint pedig nem volt a tananyag része a táblázatkezelés.

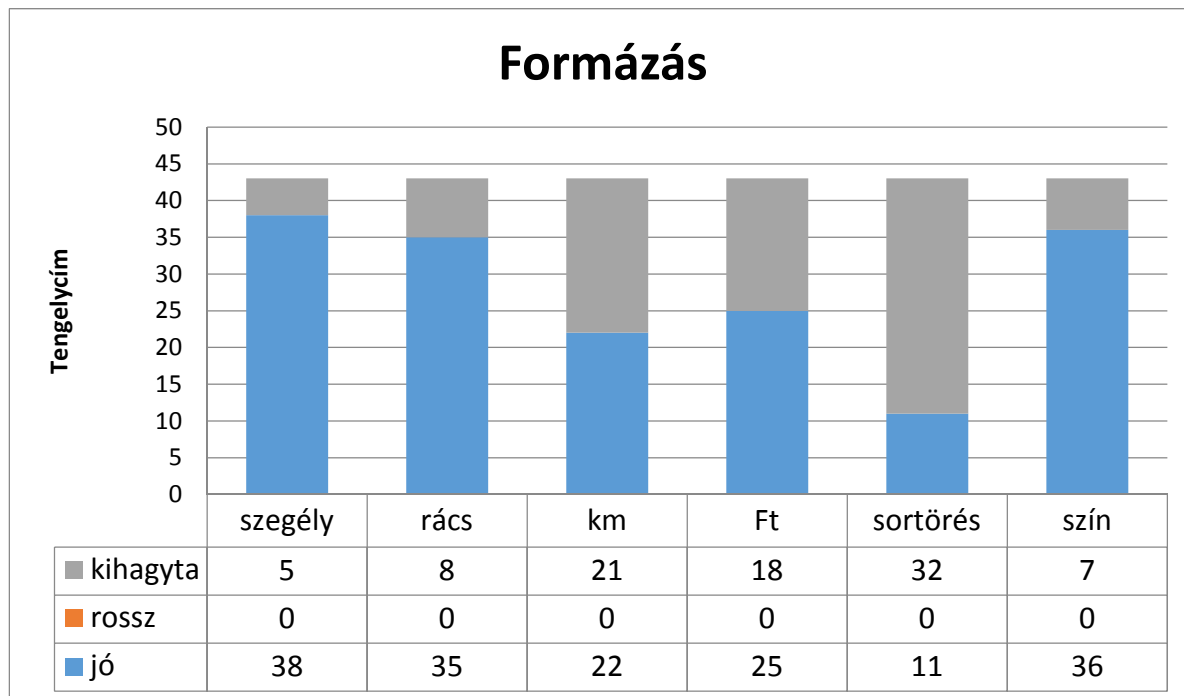
2. Formázás

A formázással kapcsolatos részben a hallgatók kaptak egy előre formázott mintát, s egy formázatlan táblát kellett hasonló módon megformázni. A feladatok között szerepelt

- szegélyek, rácsok alkalmazása;
- mértékegység szerepeltetése szám után (km);
- pénz nem szerepeltetése szám után (Ft);
- egy cellába több sort írni;
- celláknak háttérszínt adni.

A feladattípusok közül a formázásban mutattak legnagyobb jártasságot a diákok, bár 2 fontos formázási utasításnál magas volt a feladatot nem megoldók aránya: A hallgatók közel

háromnegyede nem tudott egy cellába több sort írni, míg a mértékegység szerepeltetése szám után (pl. km) a hallgatók közel felének nem ment.



1. ábra. Formázási feladatok kiértékelése.

3. Gyakori Excel függvények használata

A függvények, egyéni képletek ismeretének felmérésekor a hallgatók kaptak egy újabb táblát, amelyen oszloponként a diákok neve (A oszlop), a felvett tárgy neve (B), a vizsga dátuma (C) és a kapott pontszám (D) szerepelt. E tábla alapján a következő kérdésekre kellett válaszolniuk:

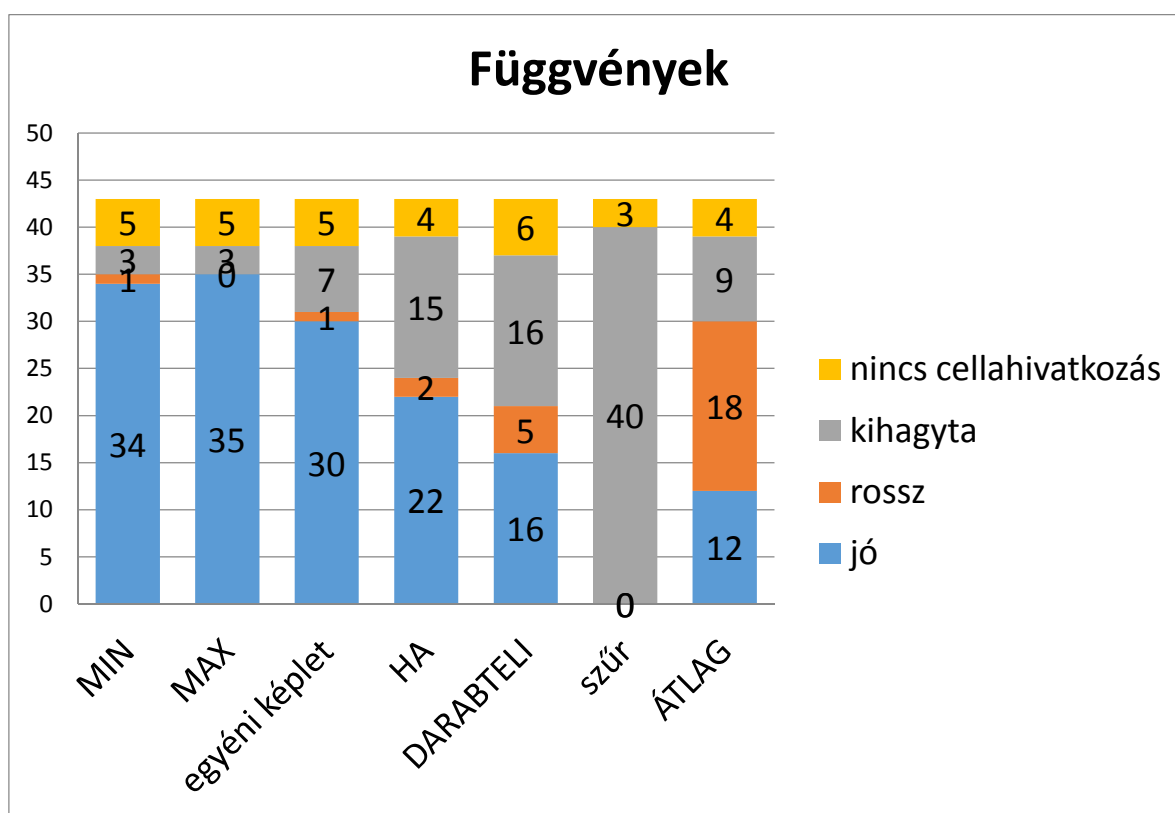
1. Mi a legkisebb pontszám?
2. Mi a legmagasabb pontszám?
3. Mi a legmagasabb és a legkisebb pontszám közti különbség?
4. Határozza meg a pontszám alapján, ki felelt meg a vizsgán! A döntést írja az E oszlopba!
5. Hány megfelelt jegy született?
6. Mi az átlagpontszáma a 2012.10.17-én angolból írt dolgozatoknak?

A függvények alkalmazásánál 6 fő nem használt cellahivatkozást, azaz nem az Excelt „dolgoztatta”, amikor a feltett kérdésekre válaszolt, csupán beírta a megfelelő számot. Még sajnálatosabb, hogy ezen 6 főből csak 2 válaszolta azt, hogy nem tanult táblázatkezelést a megelőző iskolai időszakban.

A legjobb eredményeket a MIN és MAX függvény (1. és 2. feladat) alkalmazásában mutatták a hallgatók, s az egyéni képletet (3. feladat) is 71% adta meg helyesen. Az elágazást biztosító HA

függvényt (4. feladat) csak a diákok fele ismerte, s talán ez az oka, hogy a bizonyos kritériumnak megfelelő mezők megszámolását is (5. feladat, pl. DARABTELI függvény) csak 38% alkalmazta helyesen.

A 6-os feladat megválaszolásakor az adattáblát vagy meg kellett volna szűrni, s a kiszűrt sorokra kellett volna végrehajtani az átlagolást, vagy egy olyan függvényt kellett volna alkalmazni (pl. ÁTTLAGHA, AB.ÁTLAG), amely az az átlagszámítás mellett szűri is az adattáblát. A feladat megoldásánál egyetlen esetben sem alkalmaztak a hallgatók szűrést, helyette vagy úgy rendezték a táblát, hogy a kiszűrni kívánt sorok egymás után kerüljenek, vagy egyenként válogatták ki a szűrési feltételnek megfelelő sorokat.

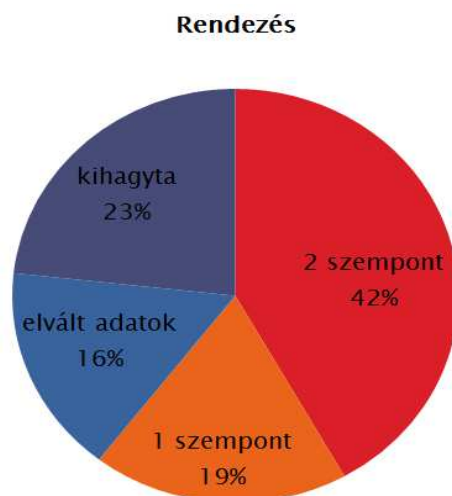


2. ábra: Függvények használatának kiértékelése

4. Adatok rendezése

A rendezés vizsgálatokor egy adattáblát 2 szempont szerint kellett berendezni. (Rendezze az adatokat Állam, s azon belül Név szerint növekvő sorrendben!)

Mindkét szempont szerint a rendezést a hallgatók 42%-a hajtotta végre helyesen. 1 szempont szerint tudta csupán rendezni a táblát 19%. Nagy az aránya azon hallgatóknak, akik hibásan (elvált adatokkal) vagy sehogy sem hajtották végre a feladatot.



3. ábra. Táblák rendezésének kiértékelése

5. Összefoglalás

Évek óta visszaköszönő probléma a középiskolás diákok tanulmányi teljesítményének romlása. Ezt mutatják a Pisa felmérések, s ezek az eredmények köszönnek vissza más kutatók által végzett felmérések során is.[2], [3], [4], [5], [9].

2013-ban új Kerettanterv lépett életbe. Az új NAT az informatikai műveltségterületet elvileg kiemelten kezeli, de a gyakorlatban ez a „kiemelés” radikális óraszámcsökkentést jelent. Az alsósoknál megszűnik a tárgy oktatása, de a felsősöknél is minimális csökkenés lesz. A gimnáziumban (kilencediktől a tizenkettedik évfolyamig) heti öt és fél helyett heti két órát szánnak majd informatikára, a szakközépiskolások heti hat helyett heti egy órában tanulhatják a számítógépek és az internet használatát. [6], [7], [8].

A tesztben a táblázatkezeléssel kapcsolatban a Kerettantervben megfogalmazott tananyag alkalmazását igénylő feladatok szerepeltek. A tesztben résztvevő hallgatók még a 2013 előtti, magasabb informatikai óraszámú Kerettanterv szerint tanultak. Az informatikára fordítható óraszámok csökkenésével a diákok eddigi, eddig sem magas tudásszintje is várhatólag visszaesik. Elmondható, hogy az informatikai alapképzettség szintjének további romlása várható.



Irodalomjegyzék

- [1] <http://kerettanterv.ofi.hu/>
- [2] http://eduline.hu/kozoktatas/2014/4/23/Sokkolo_volt_a_magyar_diakok_teljesitmenye_RPJN67
- [3] http://eduline.hu/kozoktatas/2014/3/18/Siralmas_a_helyzet_a_magyar_iskolakban_KZ835Z
- [4] Jelentés a magyar közoktatásról 2006, <http://mek.oszk.hu/08400/08429/08429.pdf>
- [5] Jelentés a magyar közoktatásról 2010, <http://oitk.tatk.elte.hu/hu/node/103>
- [6] <http://njszt.hu/neumann/hir/20121031/az-informatika-es-az-uj-kozoktatasi-kerettanterv>
- [7] http://www.isze.hu/download/ISZE_informatika_kerettantervi_velemenypdf
- [8] http://index.hu/tech/2012/10/27/uton_a_digitalis_irastudatlansag_fele
- [9] Hornyák Zoltán (2002) Informatika alapműveltségi írásbeli vizsgafeladatok országos mérésének tapasztalatai. EDUCATIO. MÉRLEGEN, 1990-2002. 139-147. <http://epa.oszk.hu/01500/01551/00019/pdf/51.pdf>



A mesterséges intelligencia hatása a munkahelyekre

PRINCZ M.

Debreceni Egyetem, pmaria@unideb.hu

Abstract. Artificial intelligence will transform the global economy over the next 20 years, cutting the costs of doing business but exacerbating social inequality. Hundreds of millions of jobs will become obsolete in the coming decades, and some jobs will not require human. There are predicts that nearly half of jobs will disappear in the next 20 years.

Bevezetés

Paradigmaváltás előtt állunk. Számos tanulmány foglalkozik avval, hogy a robotok, a mesterséges intelligencia fejlődése exponenciális gyorsasággal zajlik, amely néhány éven belül teljesen meg fogja változtatni a gazdaságot és mindennapi életünket. [1],[2],[3],[4]

A költségek csökkentésének és a munkaerőhiány enyhítésének érdekében húsz éven belül a világ fejlett országaiban a jelenlegi munkahelyek felét igen nagy eséllyel automatizálják.

Míg korábban az volt a jellemző, hogy a robotok fizikai munkákat végeztek, napjainkban már a magas képzettséget igénylő szakmákat is el tudják látni.

1. Automatizálható állások

Gyári dolgozók

A termelés volt az a terület, ahol először kezdtek ipari robotokat alkalmazni, hiszen a robotok ismétlődő munkafolyamatok esetében az embernél jóval hatékonyabbak.

Jelenleg a világban átlagosan 66 robot jut 10 ezer munkásra, de ez az érték az erősen automatizált japán autóiparban 1520.

Kínában 30, Japánban 323, Németországban 282 robot minden tízezer munkásra. [3] Kínában jelenleg épül az első, teljesen robotokkal termelő gyár Tungkuan városban, ahol az 1800 munkás 90 százalékát cserélik gépekre. A további tervek szerint a város ipari parkjában összesen 30 ezer állást cserélnék robotokra. A robotok száma Kínában két éven belül megduplázódhat, így 2017-re Kína alkalmazhatja a legtöbb robotot a világon.

Robotokat alkalmazni olcsóbb, mint kiszervezni a gyártást. A fejlett országok cégei a munkaerőköltségek 65 százalékát meg tudják spórolni, ha a gyártást fejlődő országokba

szervezik ki, ahol alacsonyabbak a fizetések. Ha az embereket robotokra cserélik, akkor a költségek 90 százalékát takaríthatják meg. [3]

Mozdonyvezető, taxisofőr

A szállítmányozás terén lévő munkaerőhiány számos fejlett országban okoz gondot. Magyarországon is hiány van sofőrökben, így - 2015. szeptemberi bejelentés szerint - csaknem hatezer ember gépjárművezető-képzését finanszírozza a kormány.

A munkaerőhiány enyhítésére számos megoldás született vagy van születőben:

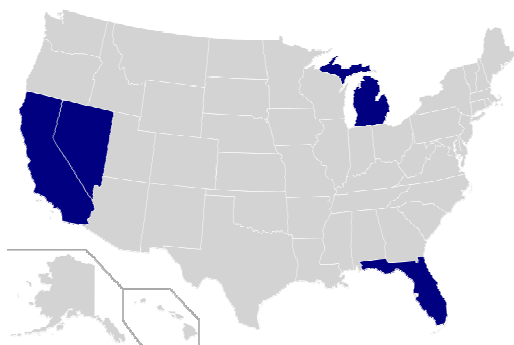
Sok országban működnek vezető nélküli (GoA4) metró szerelvények, így Európa 8, Amerika 2, Ázsia 9 országában. Budapesten a 4-es metró szintén GoA4 elven, vezető nélkül működik. Ezek a járművek teljesen automatikusak, beleértve az ajtók bezárását, az akadályok felismerését és a vészhelyzetre adott válaszadást is.[8]

Nehezebb probléma a nem kötött pályán történő szállítmányozás automatizálása.

A Google 2012 óta folytat sikeres kísérleteket a vezető nélküli személyautókkal. Több millió kilométert tettek meg a járművek baleset nélkül, azonban egyelőre még alacsony sebességgel közlekedve. Már négy szövetségi államban (California, Michigan, Florida, Nevada) találkozhatnak az autósok a Google autóival. A fő cél a nagyvárosok taxi forgalmát vezető nélküli, elektromos autókra átállítani. [8]

A Google becslései szerint 2-5 év múlva már tömegesen megjelenhetnek a piacon a sofőr nélküli taxik New Yorkban. (Erről a keresőóriás és a városvezetés már megállapodást is aláírt).

Mivel a vezető nélküli autók közel 50 százalékkal hatékonyabban szolgálják ki az utasokat, így a jelenleg 13 ezer kocsiból álló New York-i taxi flottát a tervek szerint 5000 sofőr nélküli elektromos Google-taxi veszi majd át.



1. ábra. Sofőr nélküli Google autók tesztje Amerikában.

A Daimler vezető nélküli kamionokat tesztel Amerikában, amelyekben még ott ül a vezető, de az autópályán már emberi beavatkozás nélkül közlekednek.



Európa számos országában is elindult a vezető nélküli gépjárművek tesztje. Az angliai Milton Keynesben már az idén elindult a városon belüli sofőr nélküli taxi szolgáltatás. Önjáró autók, sofőr nélküli kamionok tesztelése folyik Hollandiában, Stájerországban, Barcelonában. [8]

Pénzügyi tanácsadó

A személyre szabott pénzügyi tanácsadás a "személyes" szolgáltatások megtestesítőjének tűnt sokáig, de itt is változások várhatók. Megjelentek azok a pénzügyi szolgáltató alkalmazások (pl. Watson, IBM), amelyek egyre kifinomultabb algoritmusokat használva adnak tanácsot pénzügyi termékekről, figyelembe véve a piaci feltételeket, az ügyfél életeseeményeit, múltbéli döntéseit és a piac ajánlatait.

Mesterséges intelligenciát használó szoftverek automatikusan képesek kimutatások, statisztikák készítésére, elemzésére, a gyanús ügyletek azonosítására, növelve evvel a fizetési biztonságot, és csökkentve a munkaerőhiányt. Számos bank szoftvert alkalmaz hitelkérelmek bírálataira is.

Orvos

A sebészek munkáját évek óta robotok segítik. 2014-ben már 570 ezer műtétet hajtottak végre a világon robotok segítségével. Robotokat használnak daganatok eltávolítására, szív-műtételnél, stb. Egyre általánosabb a számítógéppel támogatott orvosi diagnosztika szűrővizsgálatok, röntgenképek, molekuláris diagnosztikai vizsgálatok elemzésekor. Watson, az IBM szuperszámítógépe számos amerikai kórházzal működik együtt annak érdekében, hogy bizonyos rákos megbetegedésekre a legjobb terápiát lehessen kiválasztani. Ezek a szoftverek a következtetés helyett a mintaillesztésre koncentrálnak, igen-nem válaszok helyett bizonyossági szinteket adnak. Bizonyos döntések meghozatalára, a nem várt helyzetekre, problémákra választ adni azonban akkor is szükség lesz az orvosra, ha egy robot fogja megoperálni a betegeket. [5]

Újságíró

A nyomtatott média jelentőségének csökkenése miatt az újságírói állások száma is jelentősen csökken, de új szoftverek megjelenése is ez irányban hat.

Ma már léteznek olyan alkalmazások, amelyek képesek elérni bizonyos adatbázisokat, és a kapott adatokból értelmes szöveget összerakni. Ilyen, robot által gyártott céges pénzügyi beszámolók olvashatók az amerikai Forbes magazinban, vagy sporttal kapcsolatos írások az AP hírügynökségnél.

Az egyik ilyen program fejlesztője, a Narrative Science szerint 15 éven belül a hírek 90 százalékát robotok generálják majd, de ez nem jelenti azt, hogy az újságírói állások 90 %-a megszűnne.



Nyomdász

A nyomdák digitális átállásával egyre kevesebb nyomdászra van szükség, amit jól jelez a nyomdász képzések megszűnése is. A papíralapú, nyomdafestékes gépek eltűntével a klasszikus nyomdász állások is megszűnnek.

Reklámszakember

Mesterséges intelligenciát használó szoftver elemzi az internetezők böngészési szokásait és teszi célzottabbá az online hirdetéseket. A világhálón lévő ügyfél képernyőjén a múltbéli kereséseinek megfelelő hirdetések jelennek meg. Ajánló-motorokat használ a Google, a Facebook.

Ingatlan- vagy utazási ügynök, eladók

Ma már szinte minden információ lekérhető, a szolgáltatások, az áruk megrendelhetők internetes adatbázisok használatával. Egyre több turista szervezi utazását az interneten, intézi vásárlásait online adatbázisok használatával.

Bármixer,

A Royal Caribbean egyik luxustengerjáróján már dolgoznak koktélkészítő robotok, csökkentve evvel a bármixerek iránti fokozott igényt. Az italokat tabletről lehet rendelni, de a vendégek saját összeállítást is kérhetnek.

Gyorséttermi munkás

A San Francisco-i székhelyű startup vállalkozás, a Momentum Machines tervezett egy robotot, amely alkalmas az ismétlődő gyorséttermi munkák elvégzésére: hamburgert formáz, grillez, zsemlet pirít és zöldséget ad a szendvicshez.

Trainerek, gondozók

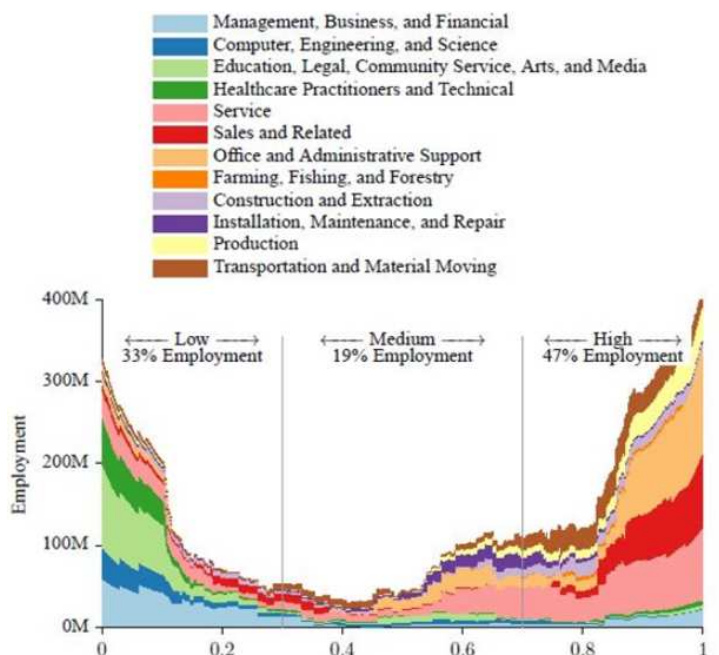
A legtöbb fejlett országban az öregedő népesség miatt jelentős hiány van gondozókból. Ezért történtek fejlesztések az általános személyi robot piacon. Ezen robotok képesek a betegek rehabilitációját segíteni, illetve az idősek és a fogyatékkal élők mindennapjaiban segítséget nyújtani.

2. Munkakörök megszűnése

Egyre több kutatás szól arról, hogy több százmillió, ha nem milliárd munkahely válik feleslegessé a következő évtizedekben, mivel az egyre magasabb fokú automatizáció következtében nem lesz szükség emberekre bizonyos munkakörökben.

Tovább fog fokozódni a specializáció, ám a nagyobb szakértelmet, szaktudást, kreativitást, tapasztalatot igénylő területeken megmarad az emberi jelenlét.

Az alábbi ábra azt mutatja, hogy az Egyesült Államokban az egyes foglalkozási körökben mekkora az esélye annak, hogy a munkakör az automatizáció miatt megszűnjön. [1]



2. ábra. Munkakörök automatizációjának valószínűsége az USA-ban [1].

Az előrejelzés szerint a menedzsment, pénzügyi, üzleti, oktatási, mérnöki, tudományos, művészeti, egészségügyi és médiát érintő területeken alacsony a kockázata annak, hogy a számítógépek, szoftverek helyettesíteni fogják a humán munkaerőt. A megszűnés kockázata alacsony a munkakörök 33 %-ánál. Ugyanakkor a szolgáltatások, az eladási, termelési, az irodai és egyéb adminisztrációs állások jelentős része már a komolyan veszélyeztetett kategóriába esik. Ezeket az állásokat mutatja a grafikon jobb oldala. Az Egyesült Államokban a jelenlegi munkakörök 47 százaléka tartozik az automatizáció miatt veszélyeztetett állások közé.

Az oxfordi egyetem kutatását a brüsszeli Bruegel kutatóintézet egyik szakértője, Jeremy Bowles az Európai Unióra vonatkoztatva is elvégezte. [4] E szerint az uniós munkavállalók 40-60 százalékát – országtól függően – érintheti komolyan az automatizáció, s ez átlagosan a munkavállalók 54 %-át jelenti.



3. ábra. Az automatizáció kockázata az EU-ban [4].

A zölddel színezett országokat kevésbé érintheti majd az automatizáció – ezek az EU gazdagabb országai –, míg a sárga, narancssárga és piros színnel jelölteket már annál inkább. Leginkább



Románia munkahelyei veszélyeztetettek (61%). Magyarországon a jelenlegi munkahelyek 55 %-a komolyan kitett az automatizáció hatásainak.

Eltérő vélemények vannak arról, hogy az automatizáció az alacsonyabb képzettségű és bérezésű munkákat tűnteti el, vagy leginkább a középosztály tipikus munkaköreit vették, veszik át a számítógépek. Abban azonban egyetértés van, hogy a nagyobb szakértelmet, szaktudást, kreativitást, tapasztalatot igénylő területeken megmarad az emberi jelenlét, s a folyamatosan változó munkaerőpiacok az új munkaterületeken megjelenő új munkahelyekkel felszívhatják az innováció miatt felszabaduló humán munkaerőt.

Kérdés, hogy a technológiai fejlődés miatt megszűnt munkakörök helyett milyen új munkakörök jönnek majd létre, a növekvő jövedelemkülönbségek pedig mennyire veszélyeztetik a fennálló társadalmi rendet? Lehetséges-e, hogy az intelligens alkalmazások miatt felszabadult munkakörök miatt általánosan csökken majd a munkaidő?

Irodalomjegyzék

- [1] B. Frey, M. Osborne, Oxford University, *The Future of Employment*, 2013
http://www.oxfordmartin.ox.ac.uk/downloads/academic/The_Future_of_Employment.pdf
- [2] McKinsey Global Institute, *Disruptive technologies: Advances that will transform life, business, and the global economy*, 2013
- [3] H. Stewart, *Robot revolution: rise of 'thinking' machines could exacerbate inequality*
<http://www.theguardian.com/technology/2015/nov/05/robot-revolution-rise-machines-could-displace-third-of-uk-jobs>, 2015
- [4] J. Bowles, *The computerisation of European jobs*, <http://bruegel.org/2014/07/the-computerisation-of-european-jobs>
- [5] J. Wakefield, *Intelligent Machines: The jobs robots will steal first*
<http://www.bbc.com/news/technology-33327659>
- [6] <http://www.origo.hu/gazdasag/20151105-negyedik-ipari-forradalom-robot-mesterseges-intelligencia-munkahely-allas.html>
- [7] http://hvg.hu/gazdasag/20140807_Elveszik_elolunk_a_munkat_a_gepek
- [8] <http://en.wikipedia.org>