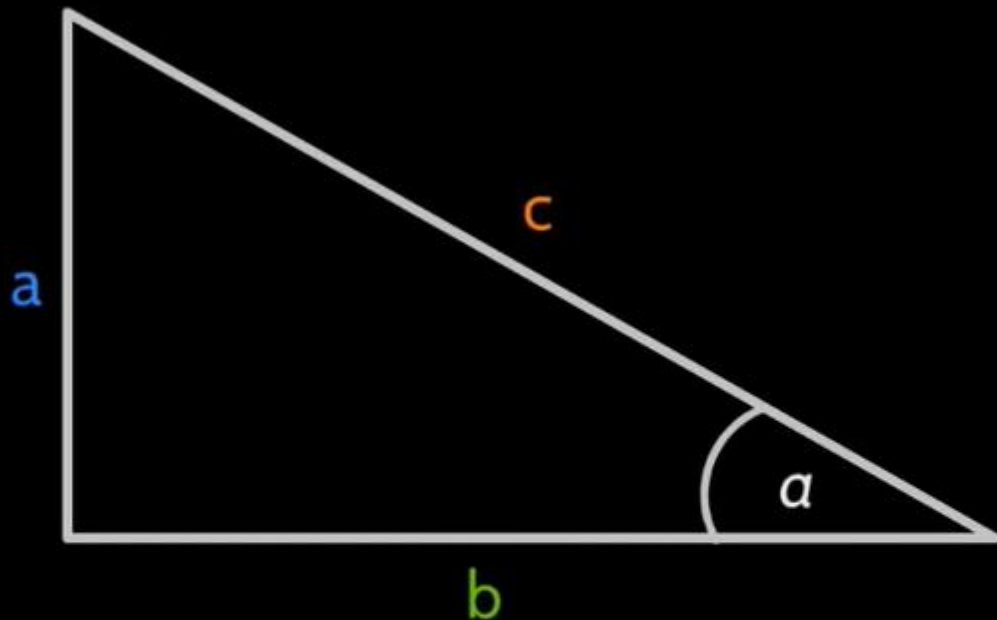


Trigonometria

2025.11.27.

2025.12.04.

Szögfüggvények bevezetése



$$\sin \alpha = a / c$$

$$\cos \alpha = b / c$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a / b = \frac{a / c}{b / c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = b / a = \frac{b / c}{a / c} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

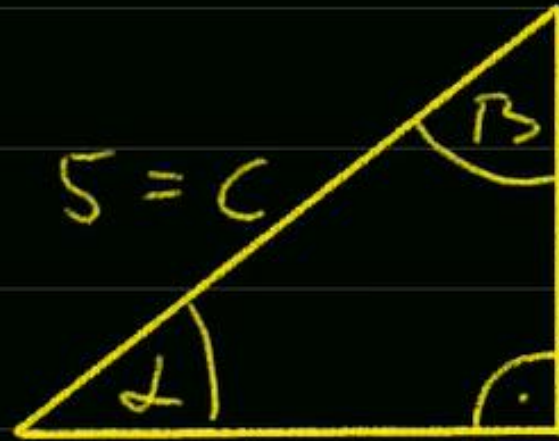
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2$$

$$(a / c)^2 + (b / c)^2 = (c / c)^2$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$$



$$a=3$$

$$b=4$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = 0,75$$

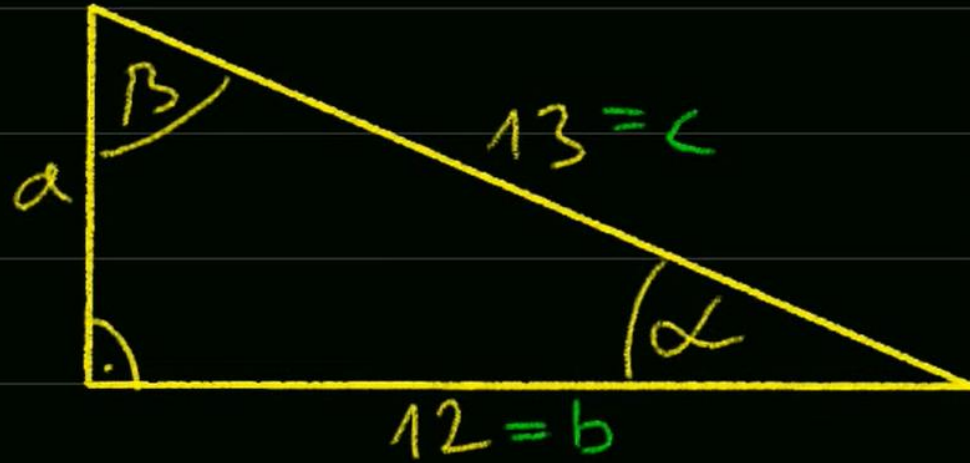
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{3} = 1,3$$

$$\sin \beta = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} = 1,3$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4} = 0,75$$



$$a = ?$$

$$\alpha = ?$$

$$\beta = ?$$

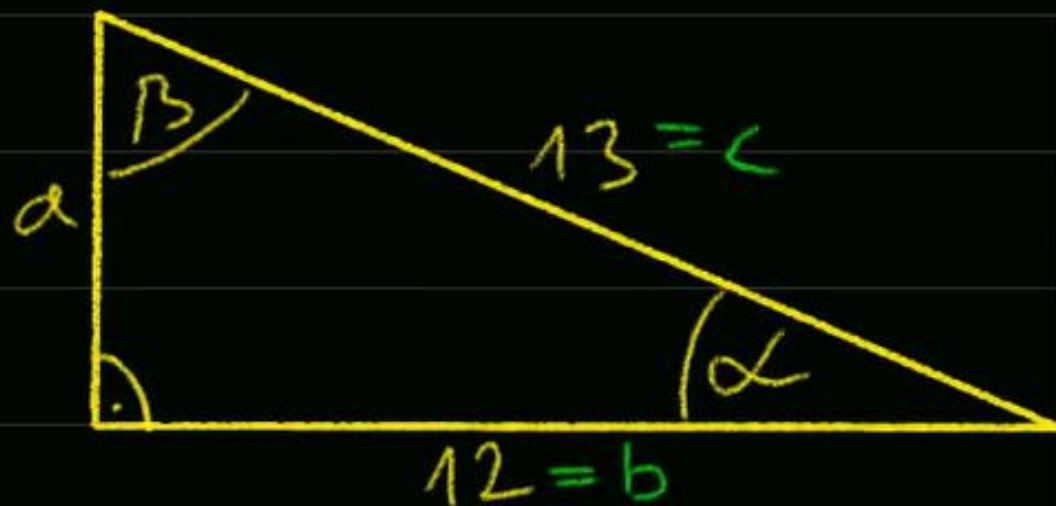
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 12^2 = 13^2$$

$$a^2 + 144 = 169 \quad / - 144$$

$$a^2 = 25 \quad / \sqrt{}$$

$$a = 5$$



$$a = ? = 5$$

$$\alpha = ?$$

$$\beta = ?$$

$$\alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$$

22.61986494804

Scientific $\frac{\pi}{180}$

2nd	const π	var x	1/x $\frac{1}{x}$	e	(	,	)	$\leftrightarrow$	$\leftarrow$
$\sin^{-1}$	$\sinh^{-1}$	$\cot^{-1}$	$y\sqrt{x}$	x^y	7	8	9	$\div$	C
$\cos^{-1}$	$\cosh^{-1}$	$\sec^{-1}$	$\sqrt[3]{x}$	x^3	4	5	6	$\times$	=
$\tan^{-1}$	$\tanh^{-1}$	$\csc^{-1}$	$\sqrt{x}$	x^2	1	2	3	-	
ncr	npr		log	10^x	0	$\pm$	.	+	

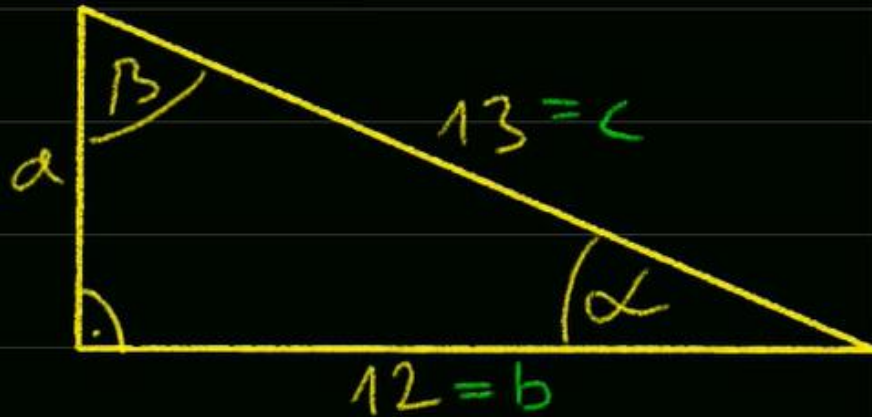
☒ Deg ☐ Rad
360° 2π

atan(5/12)



$\frac{1}{x}$ create graph





$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 12^2 = 13^2$$

$$a^2 + 144 = 169 \quad | -144$$

$$a^2 = 25 \quad | \sqrt{}$$

$$a = 5$$

$$a = c = 5$$

$$\alpha = \beta = 22,62^\circ$$

$$\beta = \alpha = 67,38^\circ$$

$$\alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\beta: \cos \beta = \frac{5}{13}$$

$$\alpha + \beta = 22,62^\circ + 67,38^\circ = 90^\circ$$



Használd a nevezetes szögek szögfüggvényeinek pontos értékét! Számológép használata nélkül számítsd ki, mennyi:

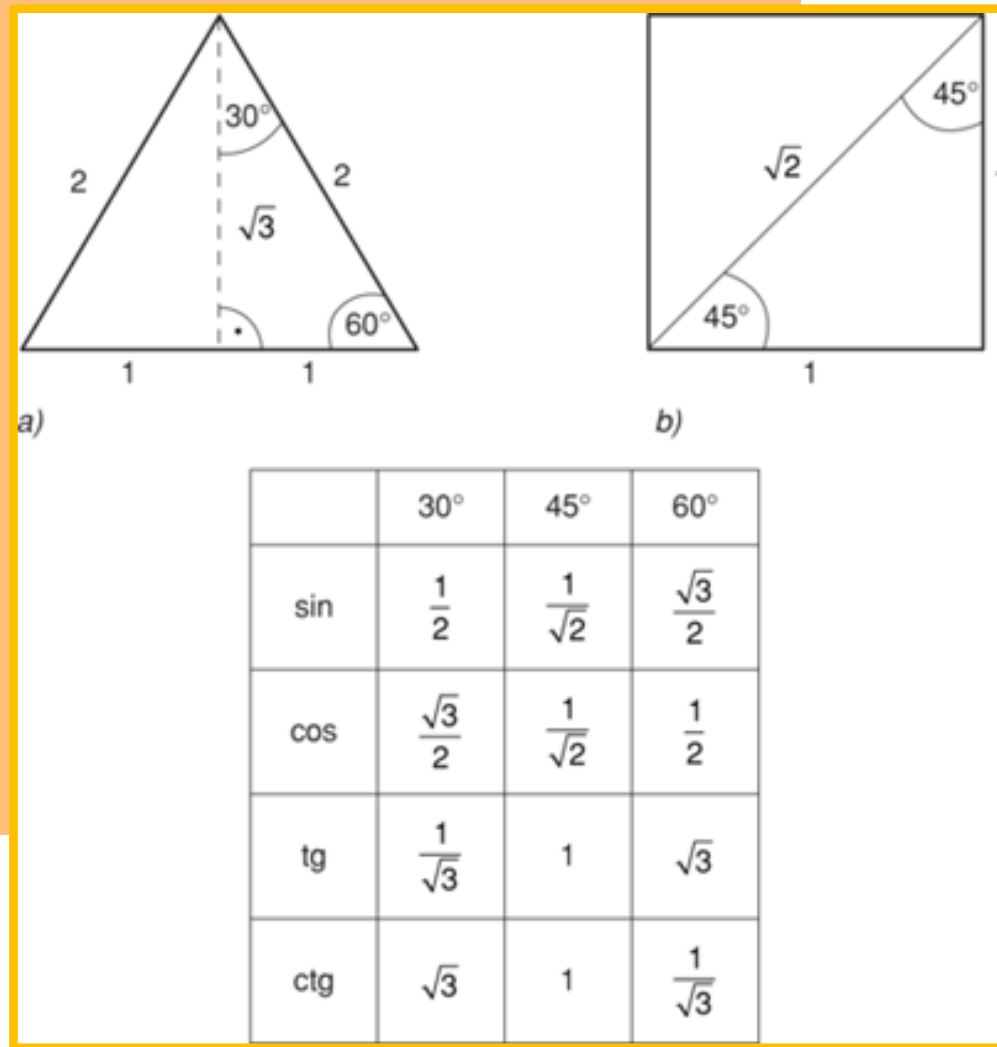
a) $(\sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \sin 45^\circ;$

b) $\frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \sin 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ}{\cos 60^\circ};$

c) $\sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ;$

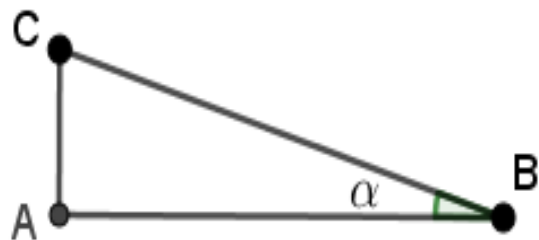
d) $\operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ!$

30°	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$
60°	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$	$\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$



Milyen magasra visz az a lejtős út, amelynek hossza 110 m és a vízszintessel bezárt szöge 17° ?

Megoldás:



$$\alpha = 17^\circ$$
$$BC = 110 \text{ m}$$

Keresendő az AC szakasz hossza.

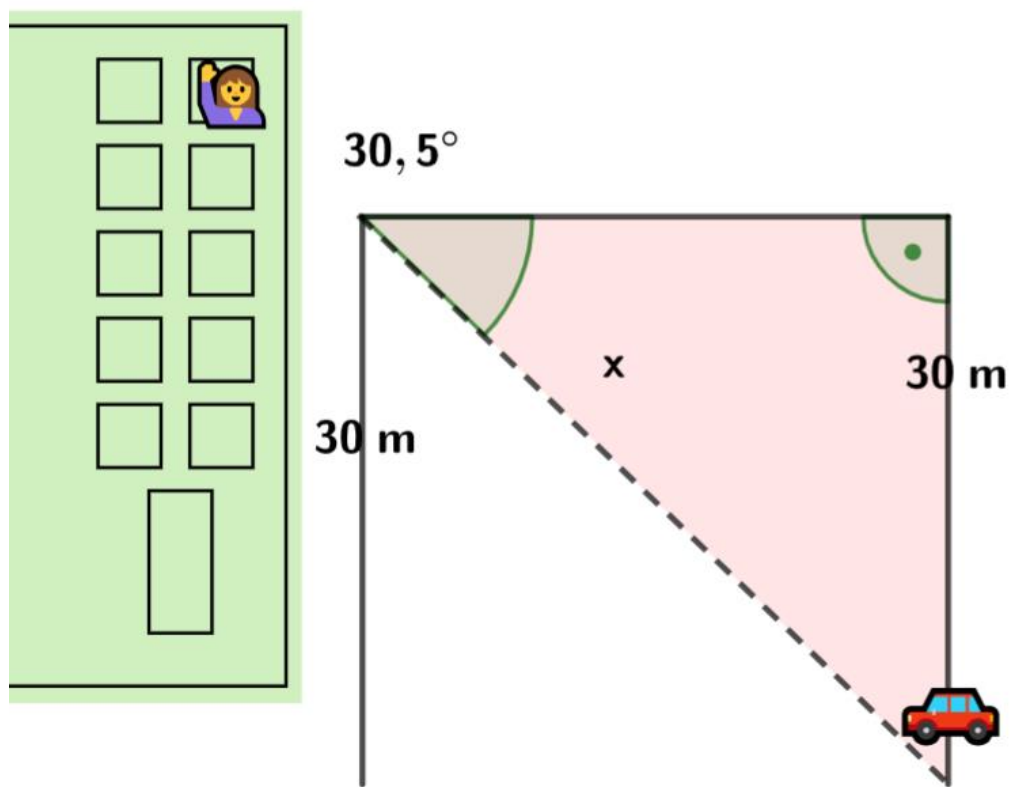
Az ABC háromszög derékszögű, melynek ismert az átfogója és az egyik hegyesszöge. A definíció alapján

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin \alpha$$

$$AC = 110 \cdot 17^\circ \approx 110 \cdot 0,2924 \approx 32,16 \text{ [m]}$$

A lejtős út 32,16 méter magasra visz.

Parkoló autónkat egy lakóház 30 méter magasan lévő ablakából 30,5°-os depresszió szögből látjuk. Mekkora távolságra van az autó légvonalban?



$$\sin 30,5^\circ = \frac{30}{x}$$

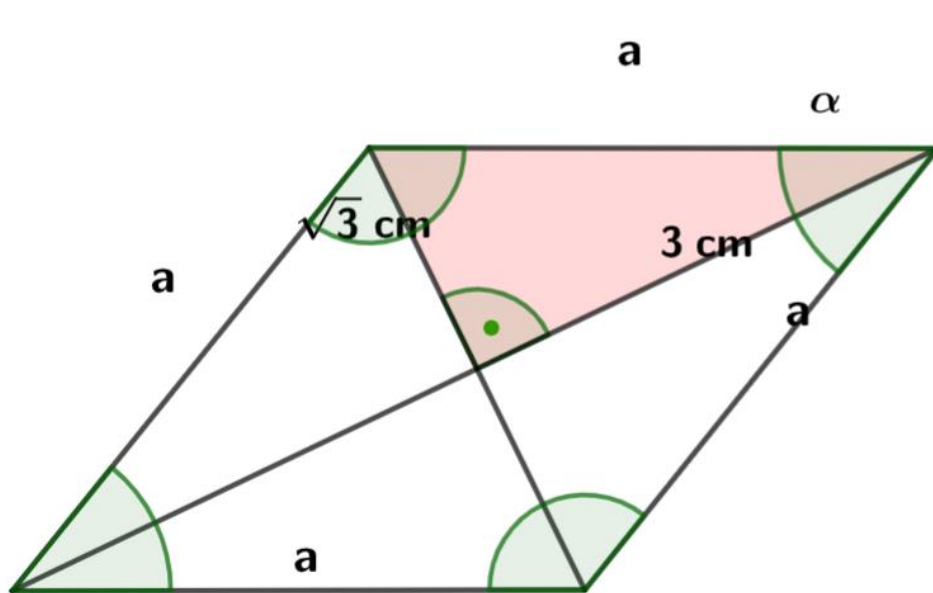
$$0,5075 = \frac{30}{x}$$

$$0,5075 \cdot x = 30$$

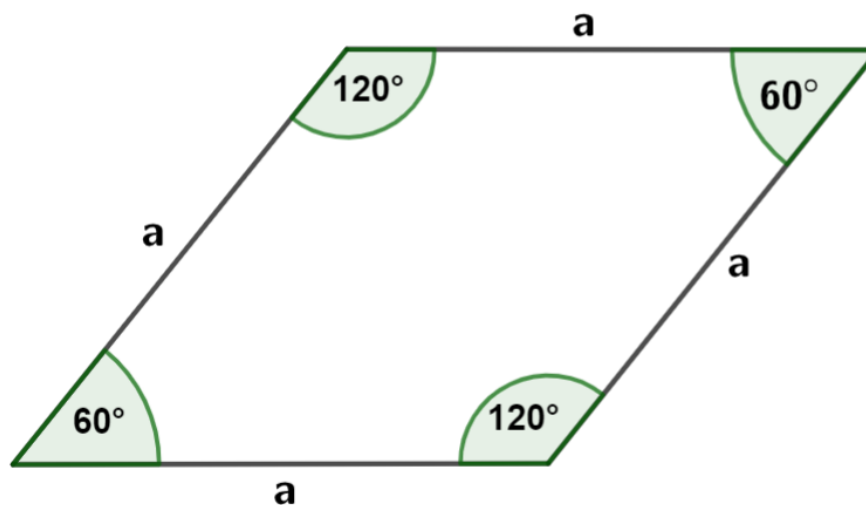
$$x = 59,11[m]$$

Az autó légvonalban 59,11 méter távolságra van.

Egy rombusz átlói $2\sqrt{3}$ cm és 6 cm hosszúak. Mekkora a rombusz szögei?



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\alpha = 30^\circ$$

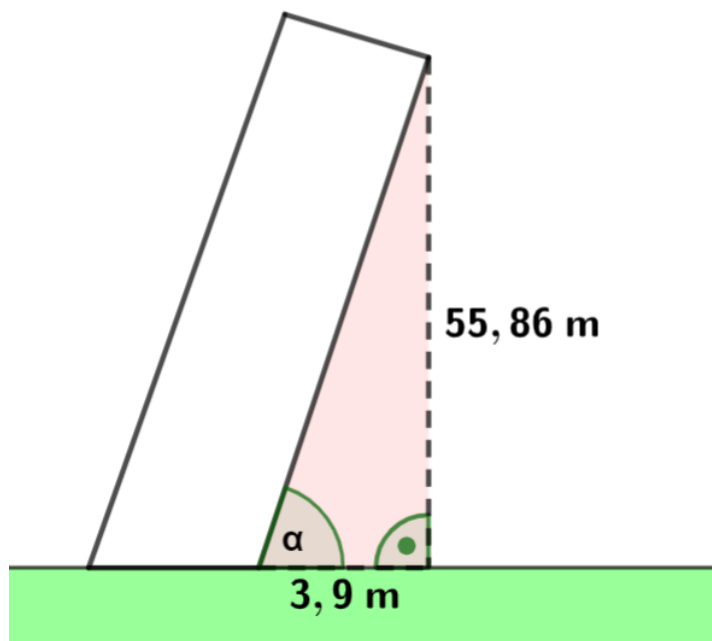


$$2\alpha = \boxed{60^\circ}$$

$$\beta = \frac{360^\circ - 2 \cdot 60^\circ}{2} = \boxed{120^\circ}$$

A rombusz szögei: 60° , illetve 120° .

A pisai ferde torony magassága az alacsonyabb oldalon 55,86 méter. A torony teteje 3,9 méterre mozdult el a függőlegetől. Hány fokos a torony dőlésszöge?



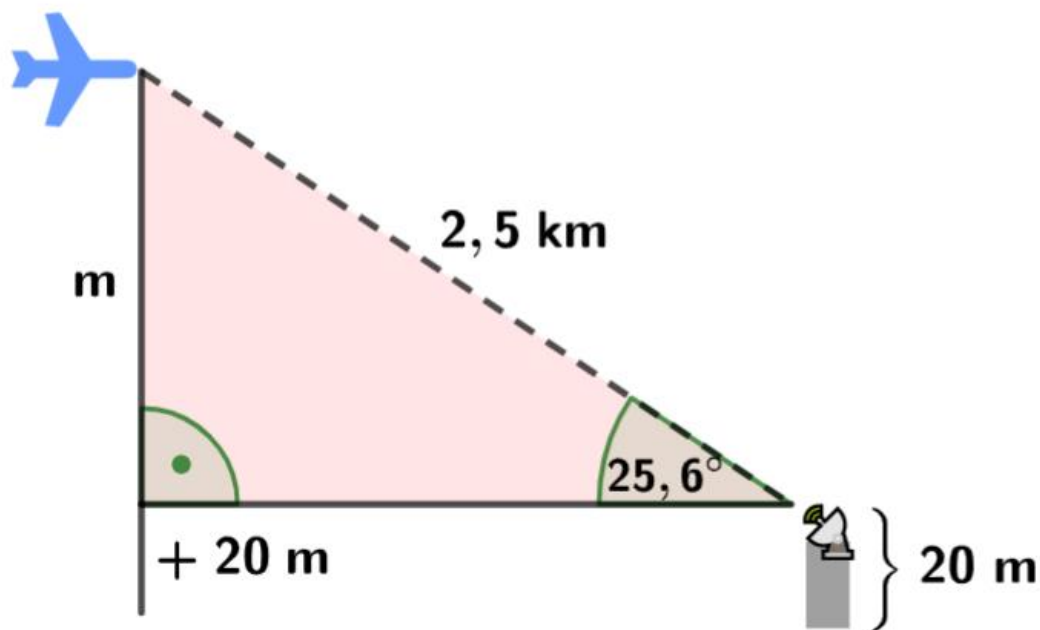
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{55,86}{3,9}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 14,3231$$

$$\alpha = 86^{\circ}$$

A torony dőlésszöge 86° .

Egy repülőgépet a 20 méter magas radar tetején lévő érzékelője $25^{\circ}36'$ -es emelkedési szögben látja. A repülőgép 2,5 km távolságra van légvonalba a radar tetejétől. Hány méter magasan van most a repülő?



$$25^{\circ}36' = 25,6^{\circ}$$

$$\sin 25,6^{\circ} = \frac{m}{2500}$$

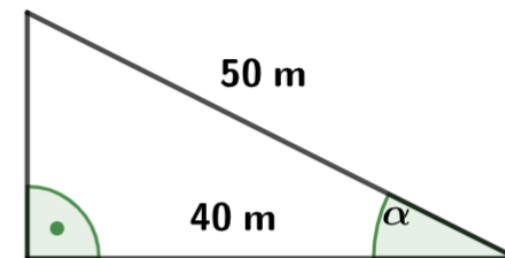
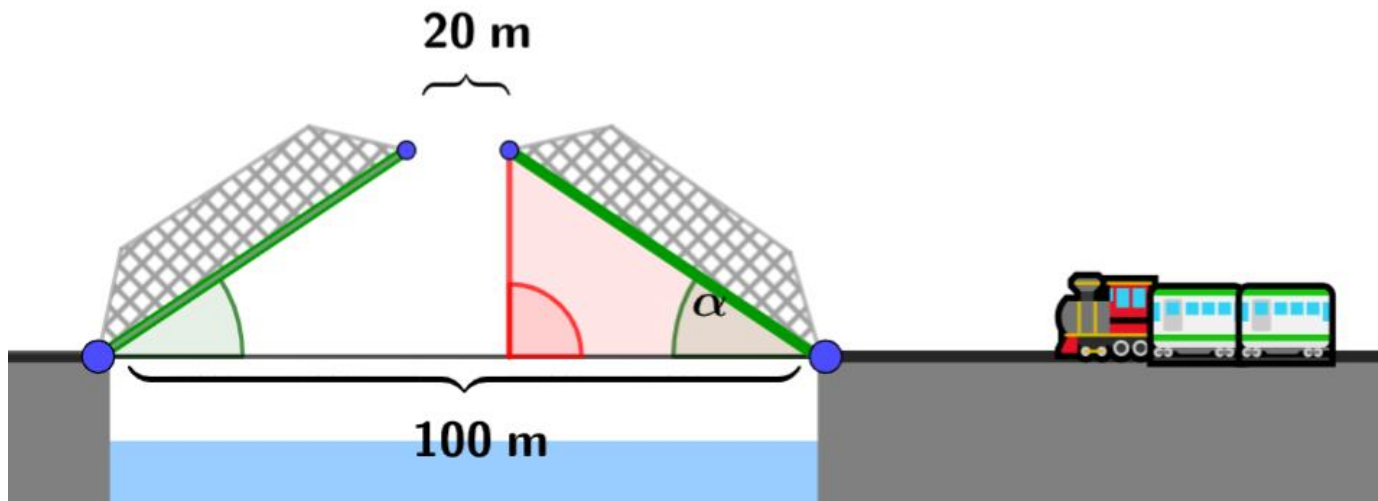
$$0,4321 = \frac{m}{2500}$$

$$m = 1080,21$$

$$1080,21 + 20 = 1100,21$$

1100,21 méter magasan van most a repülő.

Egy felnyitható híd hossza csukott állapotban 100 méter. Felnyitott állapotban a híd két részének végei 20 méter távolságra vannak egymástól. Mekkora a felnyitott híd emelkedési szöge?



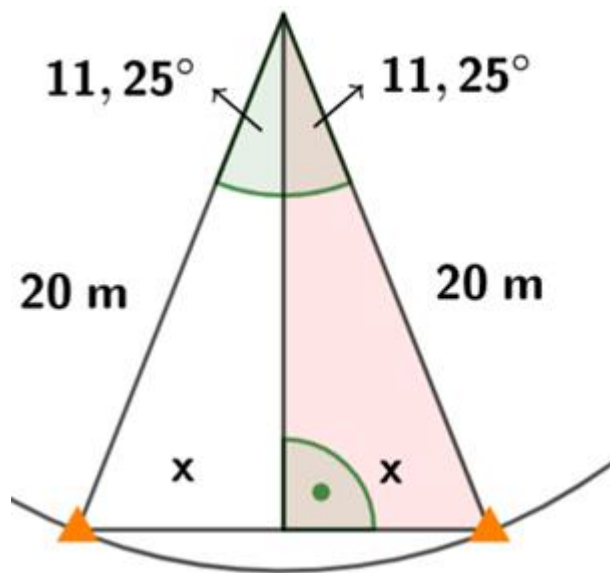
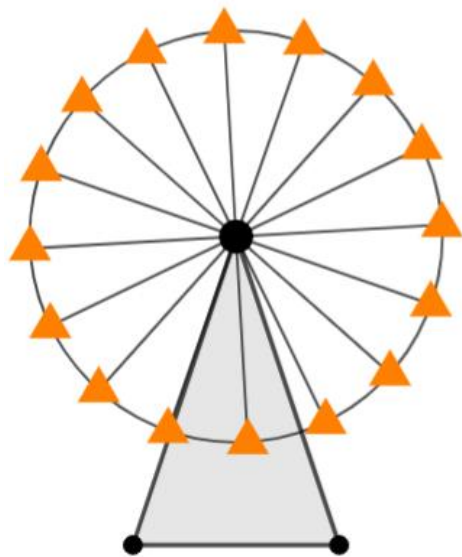
$$\cos \alpha = \frac{40}{50}$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

A felnyitott híd emelkedési szöge $36,87^\circ$.

Egy óriáskeréken 16 db utazófülke van, melyek kör alakban helyezkednek el, mint egy Szabályos sokszög csúcsai. Az óriáskerék átmérője 40 méter. Milyen messze van két szomszédos fülke egymástól?



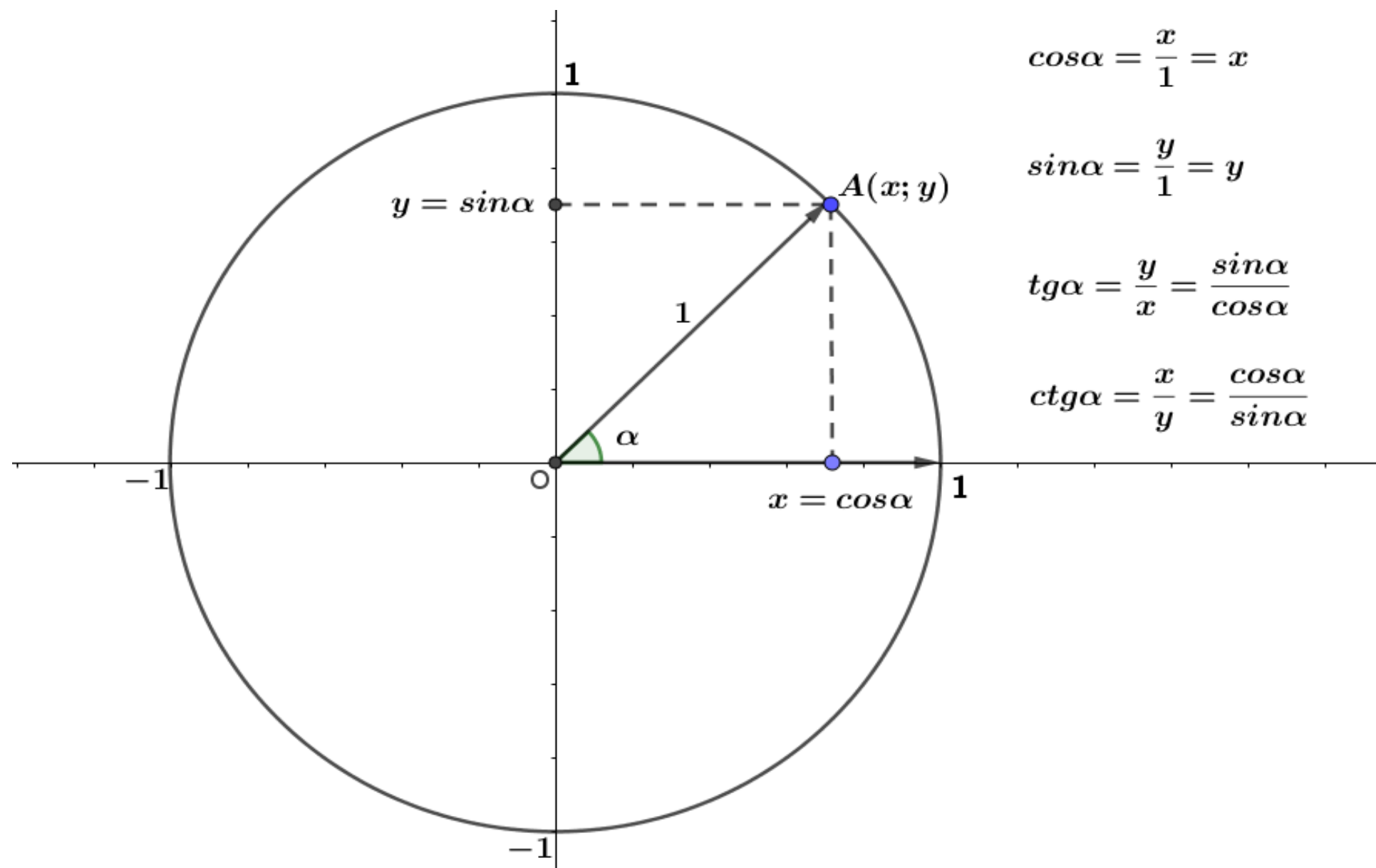
$$\sin 11,25^\circ = \frac{x}{20}$$

$$0,1951 = \frac{x}{20}$$

$$x = 3,9$$

$$2x = 3,9 \cdot 2 = \boxed{7,8}$$

Két szomszédos fülke 7,8 méter messze van egymástól.

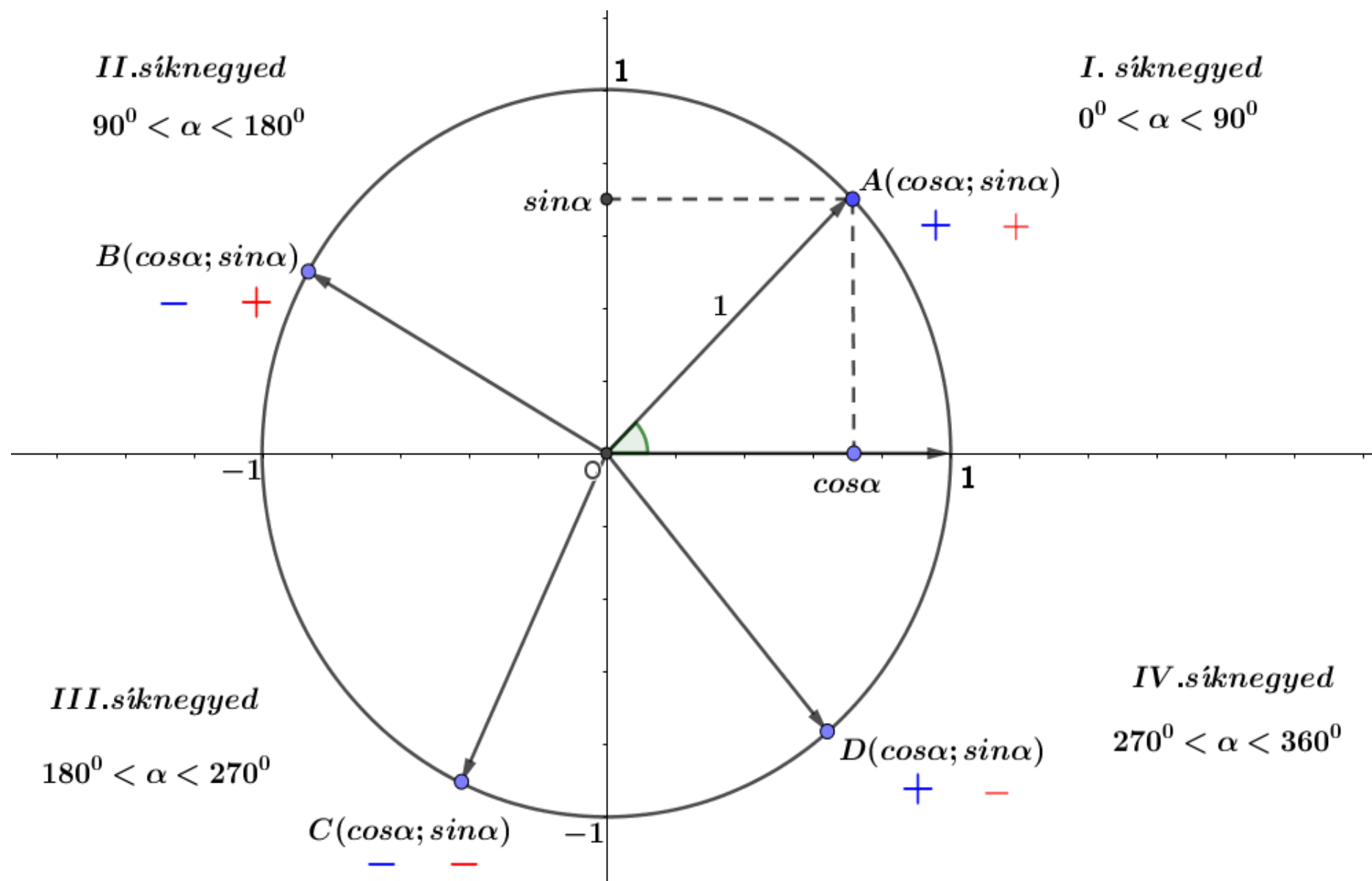


$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y$$

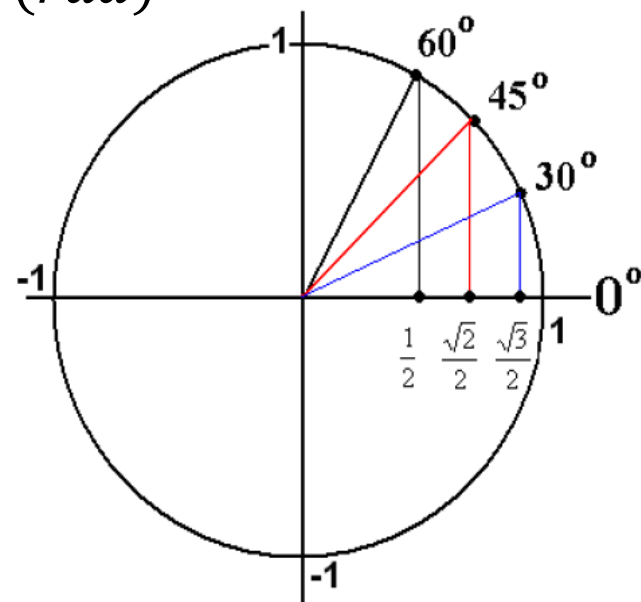
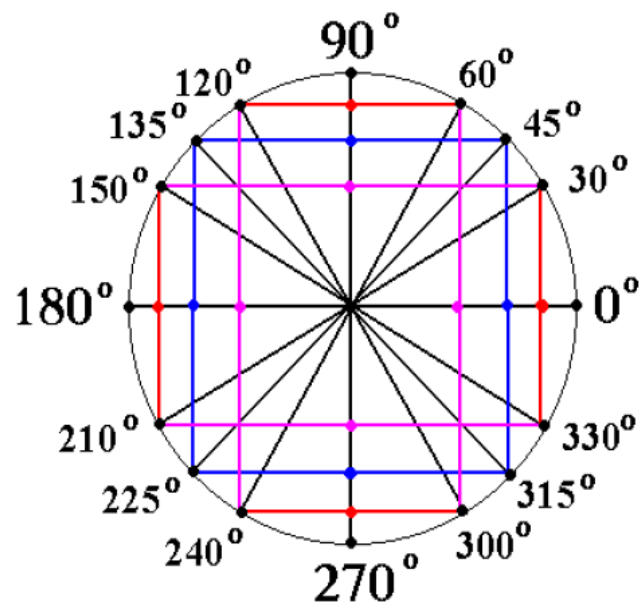
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



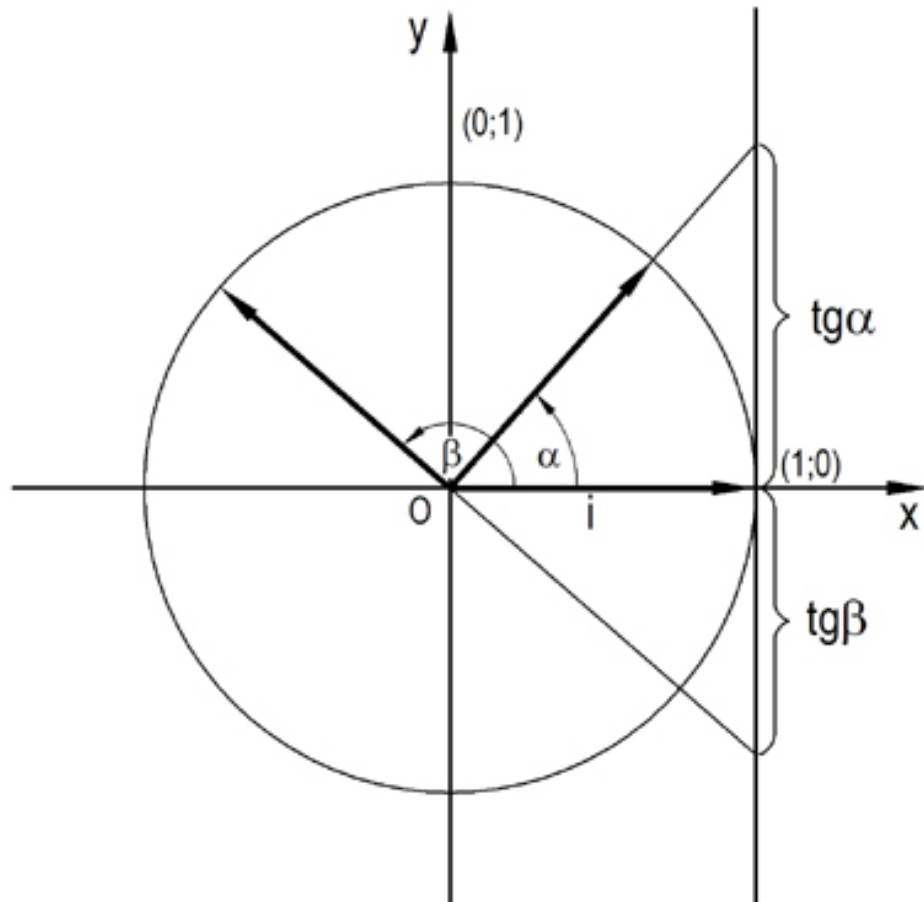
A fok és a radián között a következő összefüggés áll fenn:

$$180^{\circ} = \pi \text{ (rad)}$$

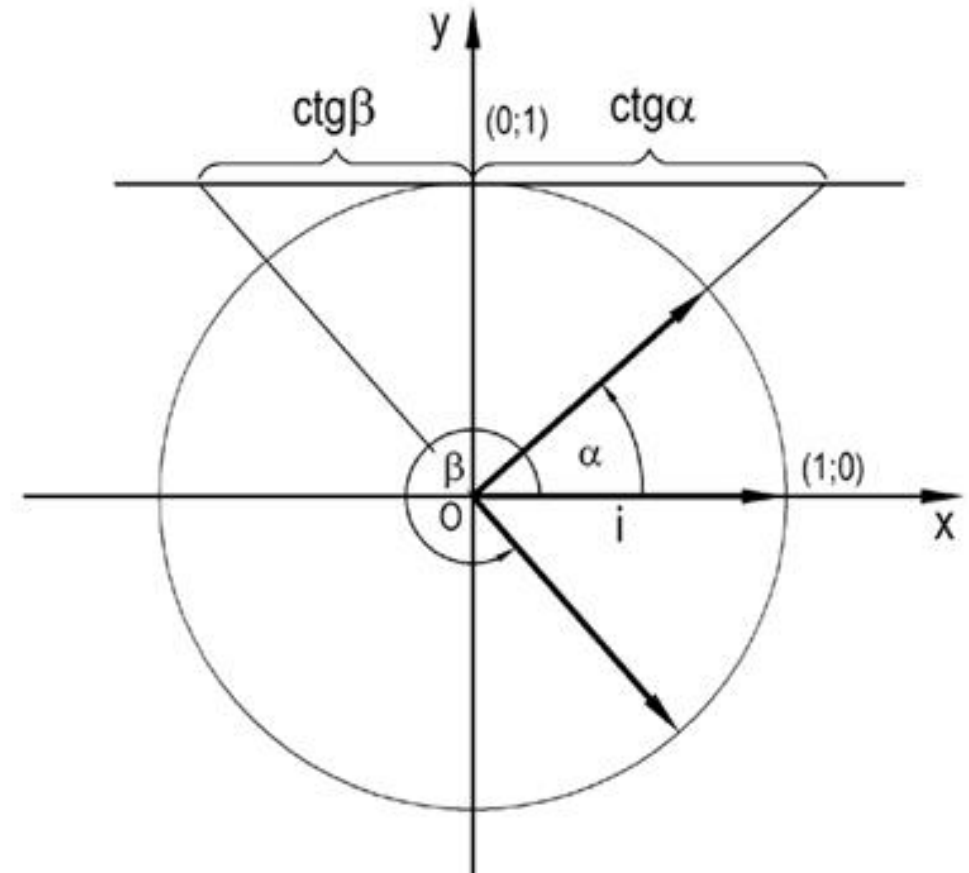


α	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	240°	270°	330°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Az α szög tangense a koordinátasíkon annak a pontnak a **második** koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó körüli egység sugarú kör $(1;0)$ pontjához húzott érintőből kimetsz.



Az α szög kotangense a koordinátasíkon annak a pontnak az **első** koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó körüli egység sugarú kör $(0;1)$ pontjához húzott érintőből kimetsz.



Szinusztétel

Legyen az ABC háromszög három oldala a, b, c , az oldalakkal szemközti szögek pedig rendre α, β, γ . Ekkor

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

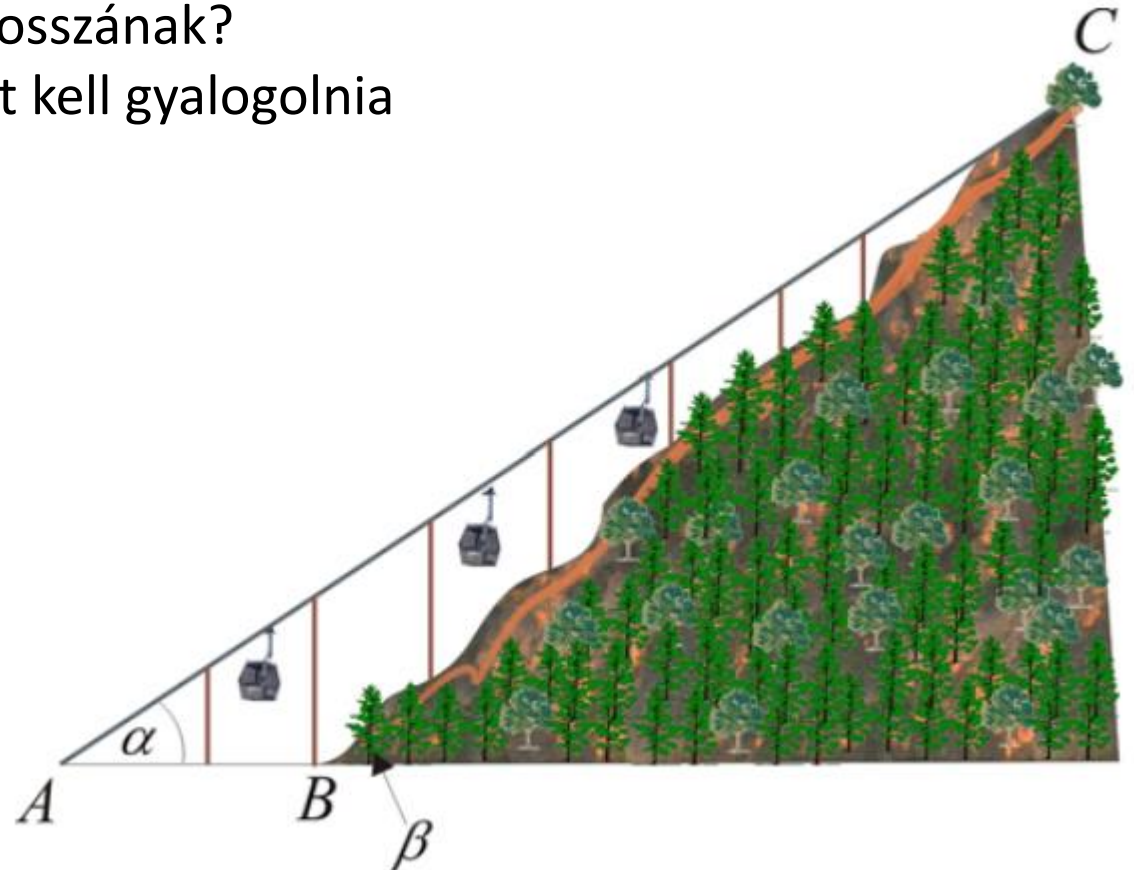
Azaz az oldalak aránya megegyezik a megfelelő oldalakkal szemközti szögek szinuszának arányával.

Megjegyzés

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Egy hegy aljáról a tetejére libegővel és gyalog egyaránt fel lehet jutni. Ha az ösvényen megyünk a hegy tetejére, közvetlenül a libegő állomásánál lyukadunk ki. A libegő pályájának meredeksége 15° , a hegy oldalán felvezető egyenes ösvényé 17° . A libegő indulási pontjától mindössze 120 m-t kell síkterepen előre sétálnunk, hogy elérkezzünk az ösvényig.

- a) Hányszorosa a kötélpálya hossza az ösvény hosszának?
- b) Milyen hosszú a libegő kötélpályája? Mennyit kell gyalogolnia annak, aki az ösvényt választja?
- c) Milyen magas a hegy?



Egy hegy aljáról a tetejére libegővel és gyalog egyaránt fel lehet jutni. Ha az ösvényen megyünk a hegy tetejére, közvetlenül a libegő állomásánál lyukadunk ki. A libegő pályájának meredeksége 15° , a hegy oldalán felvezető egyenes ösvényé 17° . A libegő indulási pontjától mindössze 120 m-t kell síkterepen előre sétálnunk, hogy elérkezzünk az ösvényig.

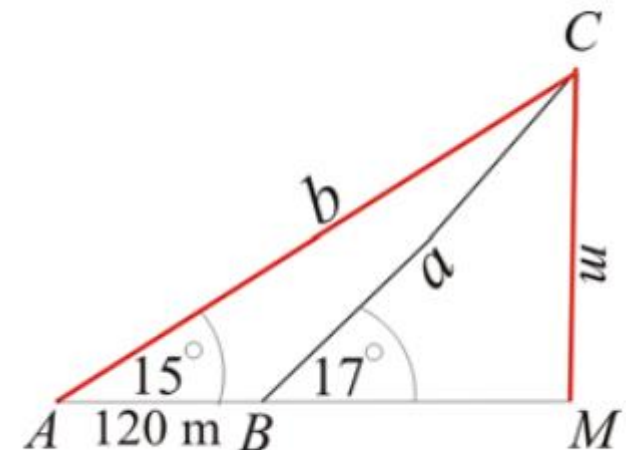
- Hányszorosa a kötélpálya hossza az ösvény hosszának?
- Milyen hosszú a libegő kötélpályája? Mennyit kell gyalogolnia annak, aki az ösvényt választja?
- Milyen magas a hegy?

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(180^\circ - 17^\circ)}{\sin(15^\circ)} = \frac{0,2924}{0,2588} \approx 1,13$$

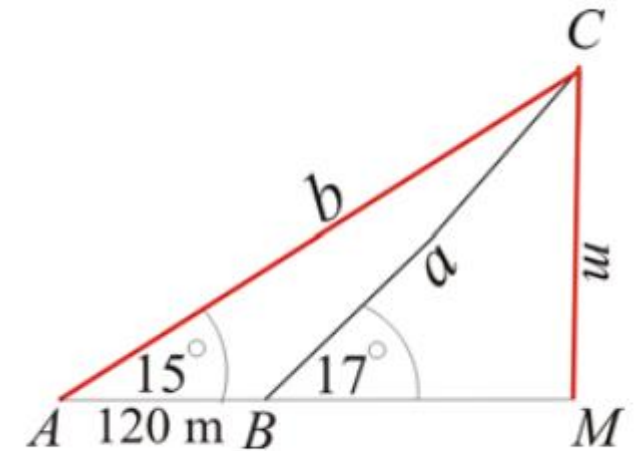
$$\angle ACB = 180^\circ - ((180^\circ - 17^\circ) + 15^\circ) = 2^\circ.$$

$$\frac{b}{120} = \frac{\sin(180^\circ - 17^\circ)}{\sin(2^\circ)} = \frac{0,2924}{0,0349} = 8,3782$$

$$b = 120 \cdot 8,3782 \approx 1005,4$$



- Hányszorosa a kötélpálya hossza az ösvény hosszának?
- Milyen hosszú a libegő kötélpályája? Mennyit kell gyalogolnia annak, aki az ösvényt választja?
- Milyen magas a hegy?



$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(180^\circ - 17^\circ)}{\sin(15^\circ)} = \frac{0,2924}{0,2588} \approx 1,13$$

$$\angle ACB = 180^\circ - ((180^\circ - 17^\circ) + 15^\circ) = 2^\circ.$$

$$\frac{b}{120} = \frac{\sin(180^\circ - 17^\circ)}{\sin(2^\circ)} = \frac{0,2924}{0,0349} = 8,3782 \quad \Rightarrow \quad b = 120 \cdot 8,3782 \approx 1005,4 \text{ [m]}$$

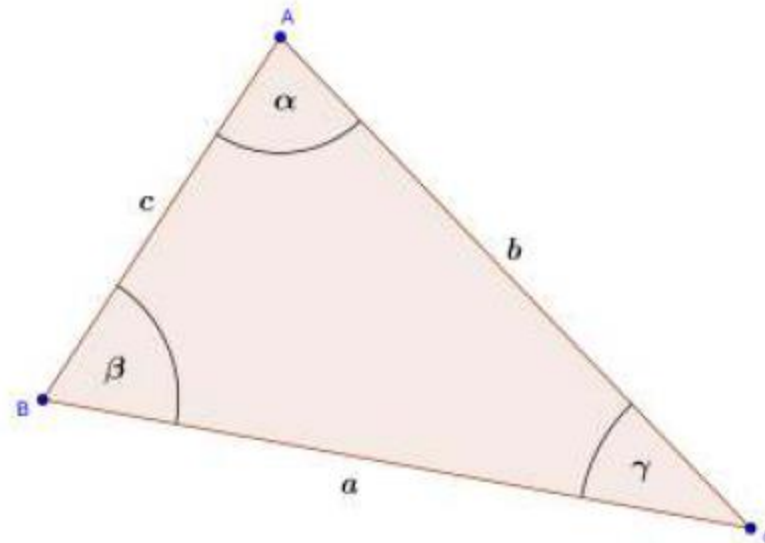
$$\frac{a}{1005,4} = \frac{0,2588}{0,2924} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{0,2588}{0,2924} \cdot 1005,4 \approx 889,87 \text{ [m]}$$

$$\frac{m}{b} = \frac{\sin(15^\circ)}{\sin(90^\circ)} \quad \Rightarrow \quad m = b \cdot \sin(15^\circ) = 1005,4 \cdot 0,2588 \approx 260,2 \text{ [m]}$$

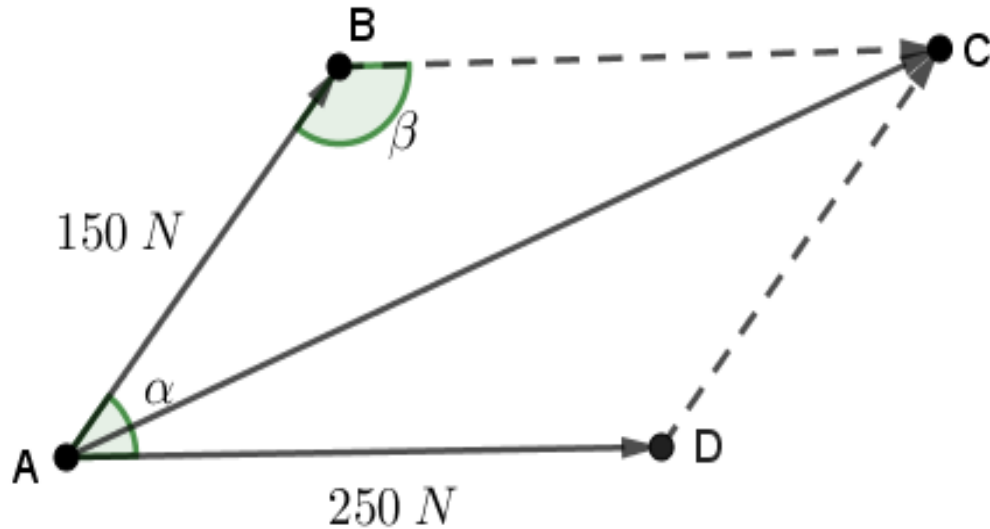
Koszinusztétel

Legyen az ABC háromszög három oldala a , b , c , az oldalakkal szemkötti szögek pedig rendre α , β , γ . Ekkor

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$



Egy testre két erő hat. Az egyik 150N, a másik 250N nagyságú. A két erő 50° -os szöget zár be egymással. Mekkora az eredő erő és hány fokos szöget zár be a nagyobbik erővel?



$\alpha = 50^\circ$, ezért $\beta = 130^\circ$. Az eredő erő:

$$|\vec{AC}|^2 = 150^2 + 250^2 - 2 \cdot 150 \cdot 250 \cdot \cos 130^\circ$$

$$\Rightarrow |\vec{AC}| \approx 365 \text{ [N]}.$$

Ennek az eredő erőnek a nagyobbik erővel bezárt szöge a $DAC\angle$. Felhasználva a szinusztételt

$$\frac{\sin(DAC\angle)}{DC} = \frac{\sin 130^\circ}{AC} \Rightarrow \sin(DAC\angle) = \frac{DC \cdot \sin 130^\circ}{AC}$$

$$\sin(DAC\angle) = \frac{114,9067}{365} \approx 0,3148 \Rightarrow DAC\angle = \arcsin(0,3148) \approx 18,35^\circ.$$

Skaláris szorzat definíciója, kiszámítása

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ ahol } \varphi \text{ a vektorok szöge}$$

Síkban: ha $\vec{a}=(a_1; a_2)$ és $\vec{b}=(b_1; b_2)$, akkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Térben: ha $\vec{a}=(a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b}=(b_1; b_2; b_3)$, akkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Addíciós tételek

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

ugyanis

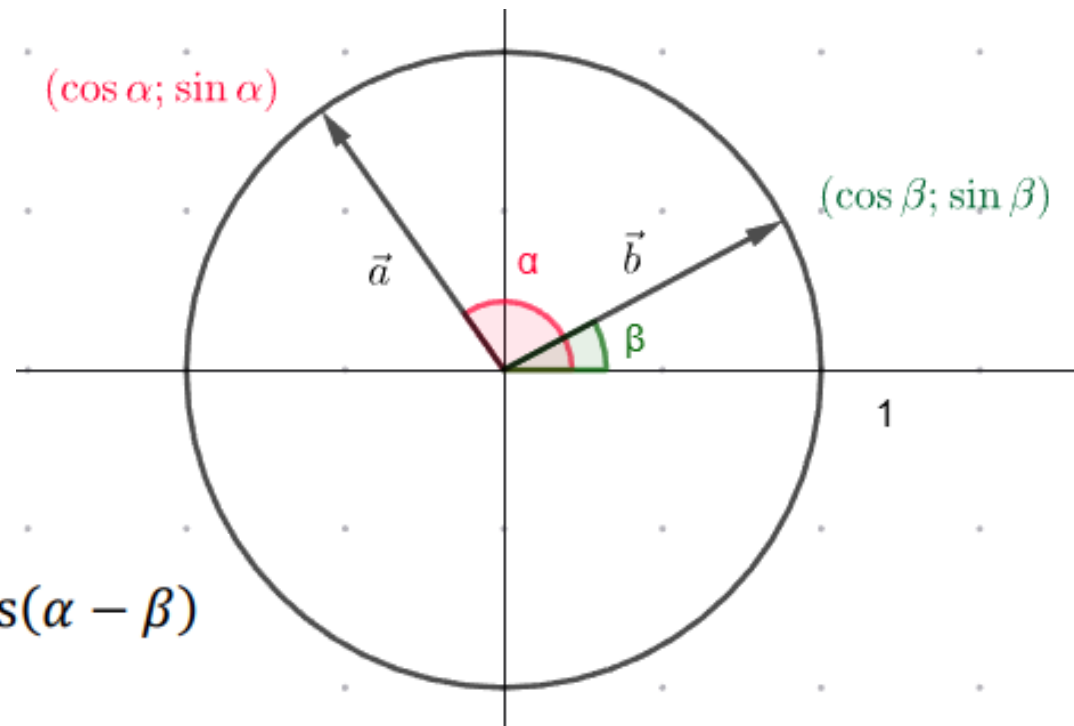
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha - \beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

ugyanis

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

ugyanis

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \cos[90^\circ - (\alpha - \beta)] = \cos[(90^\circ - \alpha) + \beta] = \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta - \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin \beta = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin(-\beta) \cdot \cos \alpha = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

ugyanis

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

PÉLDA

$$\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

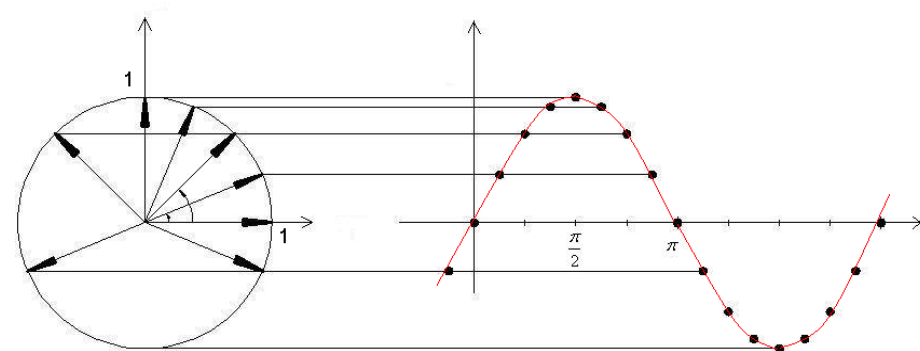
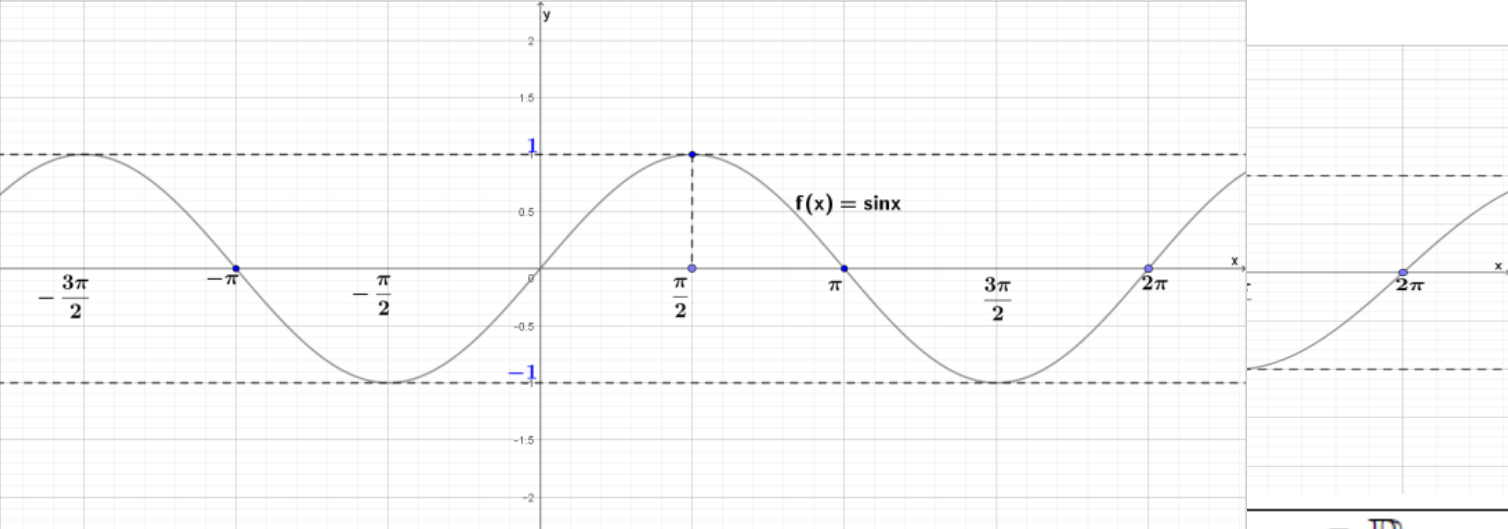
$$\operatorname{tg} 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

További tételek	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

Összefüggés a trigonometrikus függvények között

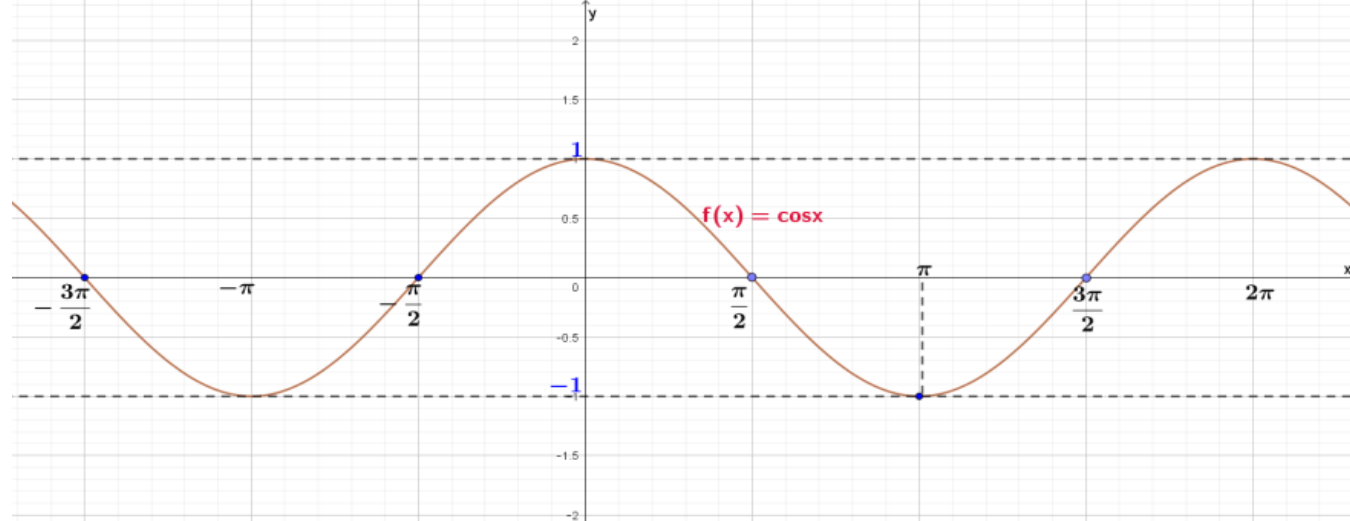
	sin	cos	tg	ctg
sin x =	-	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\frac{\text{tg } x}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{ctg}^2 x}}$
cos x =	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$	-	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}}$	$\frac{\text{ctg } x}{\pm\sqrt{1 + \text{ctg}^2 x}}$
tg x =	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	-	$\frac{1}{\text{ctg } x}$
ctg x =	$\frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\text{tg } x}$	-





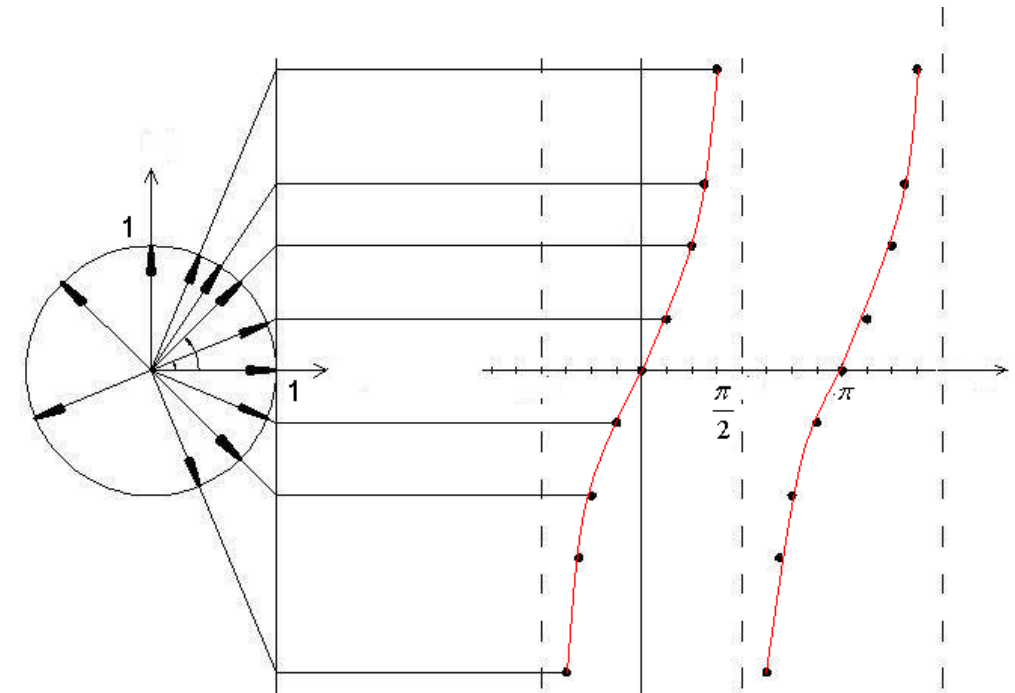
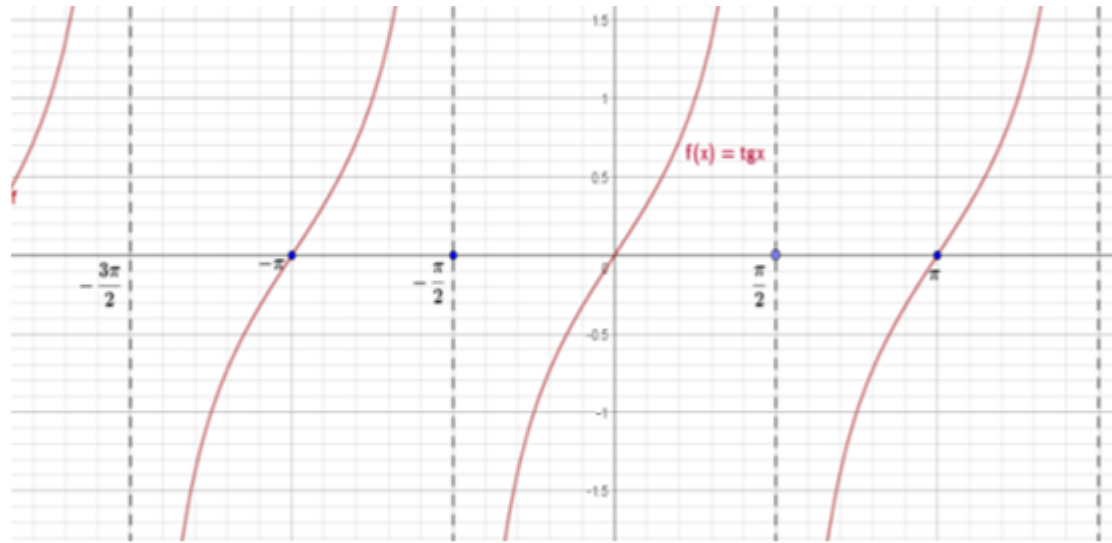
$$x \rightarrow \sin(x), x \in \mathbb{R}$$

ért.tart.	$\mathbb{R}$
ért. készl., korlátosság	$\sin(x) \in [-1, 1]$ a fv. korlátos
zérushelyek	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$
monotonitás	ha $x \in [-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$ a fv. szig. mon. nő ha $x \in [\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$ a fv. szig. mon. csökk.
konvexitás	konvex, ha $x \in [-\pi + k \cdot 2\pi, k \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$ konkáv, ha $x \in [k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$
paritás	páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin(x)$
periodicitás	periódusa 2π



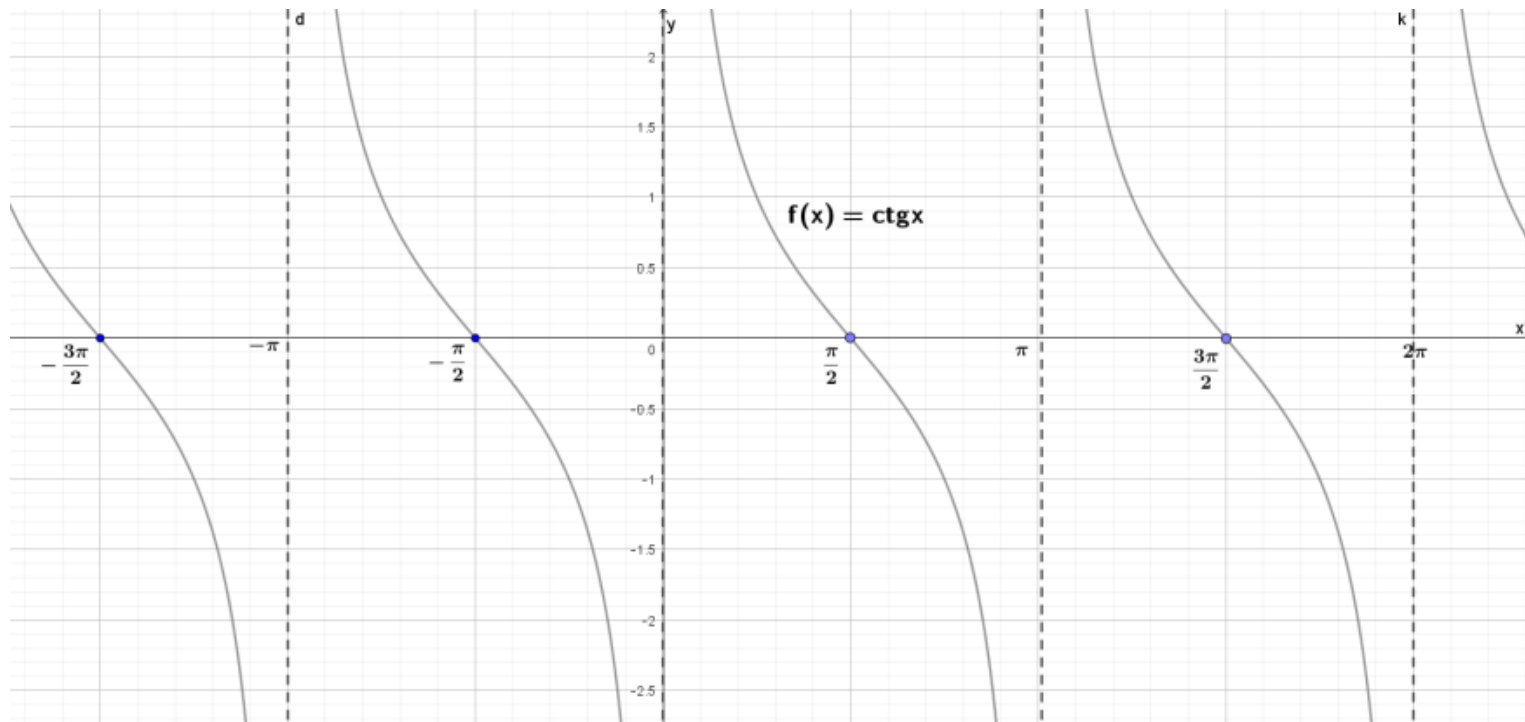
	$x \rightarrow \cos(x), x \in \mathbb{R}$
ért.tart.	$\mathbb{R}$
ért.készl., korlátosság	$\cos(x) \in [-1, 1]$ a fv. korlátos
zérushelyek	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$
monotonitás	ha $x \in [-\pi + k \cdot 2\pi, k \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$ a fv. szig. mon. nő ha $x \in [k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$ a fv. szig. mon. csökk.
konvexitás	konvex, ha $x \in [\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$ konkáv, ha $x \in [-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi], k \in \mathbb{Z}$
paritás	páros, azaz $\cos(-x) = \cos(x)$
periodicitás	periódusa 2π

$$f(x) = \operatorname{tg}(x), \quad \cos(x) \neq 0$$



- értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$
- értékészlete: $R_f = \mathbb{R}$
- zérushelyek: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
- szigorúan monoton nő a teljes értelmezési tartományon
- szélsőértékek: nincsenek
- páratlan: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$
- periodusa: π

$$f(x) = \operatorname{ctg}(x), \quad \sin(x) \neq 0$$



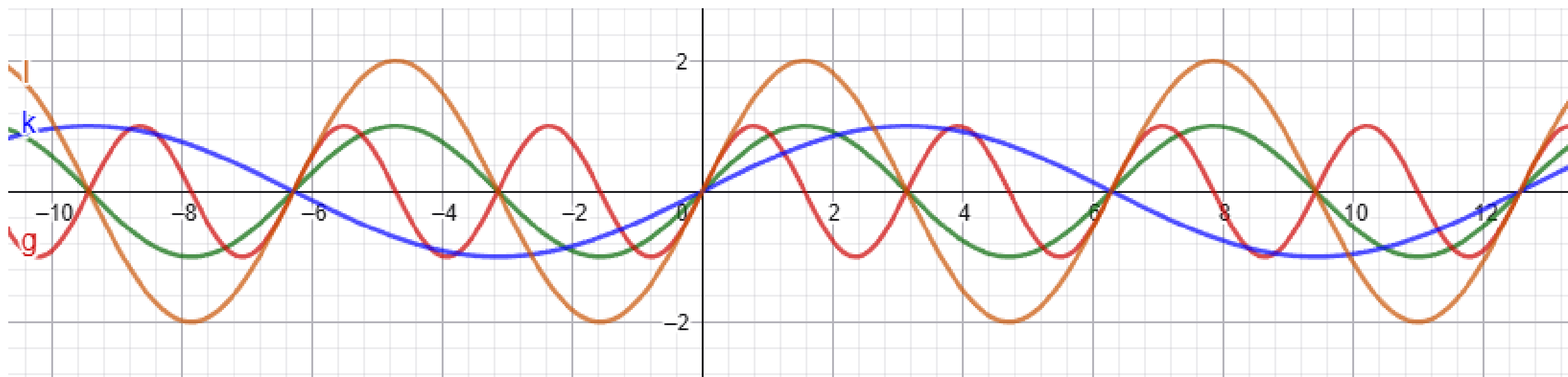
A függvény páratlan: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ (az értelmezési tartomány az y-tengelyre szimmetrikus)

● $f(x) = \sin(x)$

● $g(x) = \sin(2x)$

● $k(x) = \sin(0.5x)$

● $l(x) = 2 \sin(x)$



A trigonometrikus függvények megkerülhetetlenek minden olyan területen, ahol rezgés, hullámterjedés vagy ciklikus folyamat jelenik meg.

A harmonikus rezgések, legyen szó mechanikai, elektromágneses vagy akusztikai folyamatokról, mind trigonometrikus függvényekkel modellezhetők. A mechanikai rezgésekben az addíciós tételek segítik a kényszerrezgések, rezonanciajelenségek és lengésösszegződések elemzését.

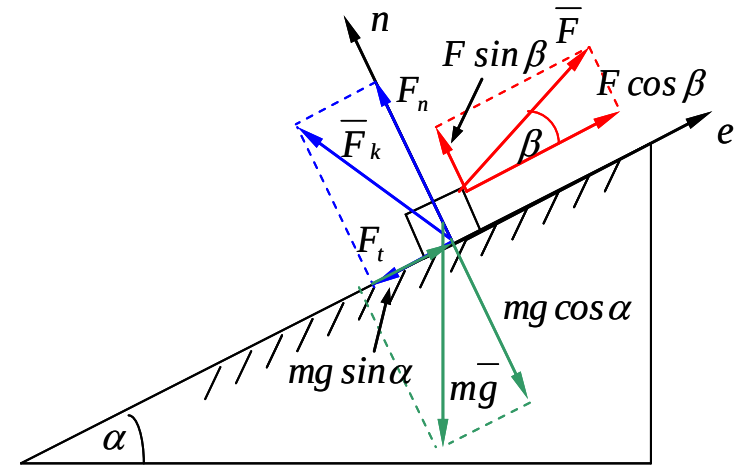
A Fourier-analízis alapja is az a felismerés, hogy tetszőleges periodikus jel felbontható szinuszok és koszinuszok összegére. A jel- és rendszerelmélet alpműveletei – például konvolúció, átviteli függvények vagy frekvenciatartománybeli elemzés – mind trigonometrikus és komplex exponenciális leíráson alapulnak.

A robotikában és gépészetben a periodikus mozgások (pl. forgókarok, oszcilláló mechanizmusok) modellezése szintén trigonometrikus függvényekkel történik.

Az építőmérnöki statikában és dinamikában a szél-, forgalom- és földrengésterhelésre adott szerkezeti válasz gyakran harmonikus komponensekre bontható.

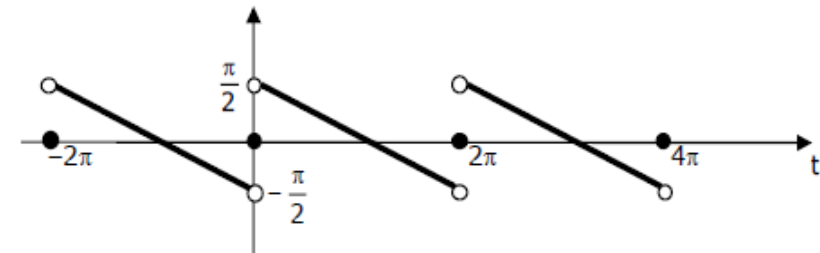
Alkalmazások

mozgástan

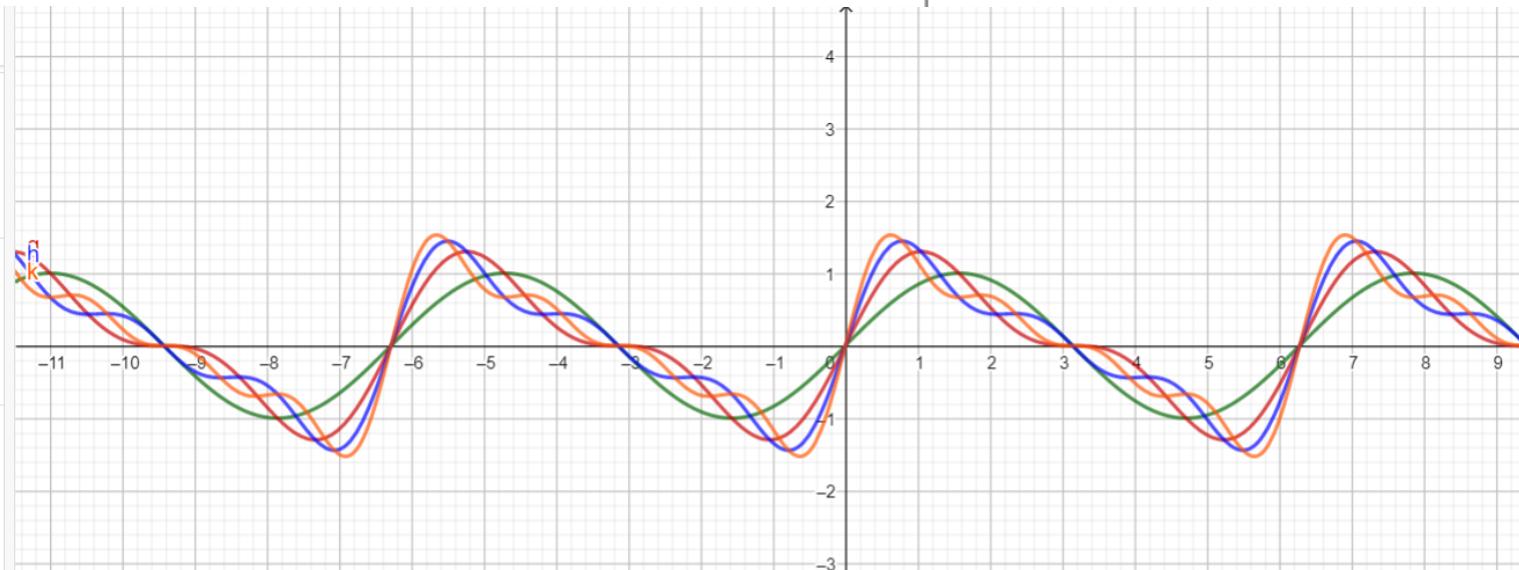


jelfeldolgozás

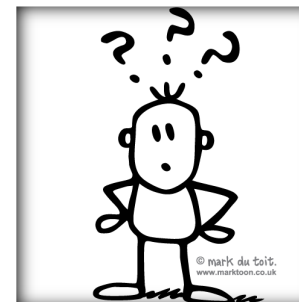
$$\begin{cases} 0, & \text{ha } t = 0 \\ -\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{2}, & \text{ha } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$



●	$f(x) = \sin(x)$	≡
●	$g(x) = f(x) + \frac{1}{2} \sin(2x)$ $\rightarrow \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x)$	⋮
●	$h(x) = g(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$ $\rightarrow \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$	⋮
●	$k(x) = h(x) + \frac{1}{4} \sin(4x)$ $\rightarrow \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x)$	⋮



**Feladat : Adja meg a függvény
periódusát!**



		A	B	C	D
1.cs.	$x \mapsto \sin 2x$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	4π
2.cs.	$x \mapsto \cos \frac{x}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	4π	π	$\frac{\pi}{4}$
3.cs.	$x \mapsto 3 + \operatorname{ctg} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\pi - 3$	3π	π

Feladat : Az alábbiak közül melyik értéket veheti fel az f függvény a

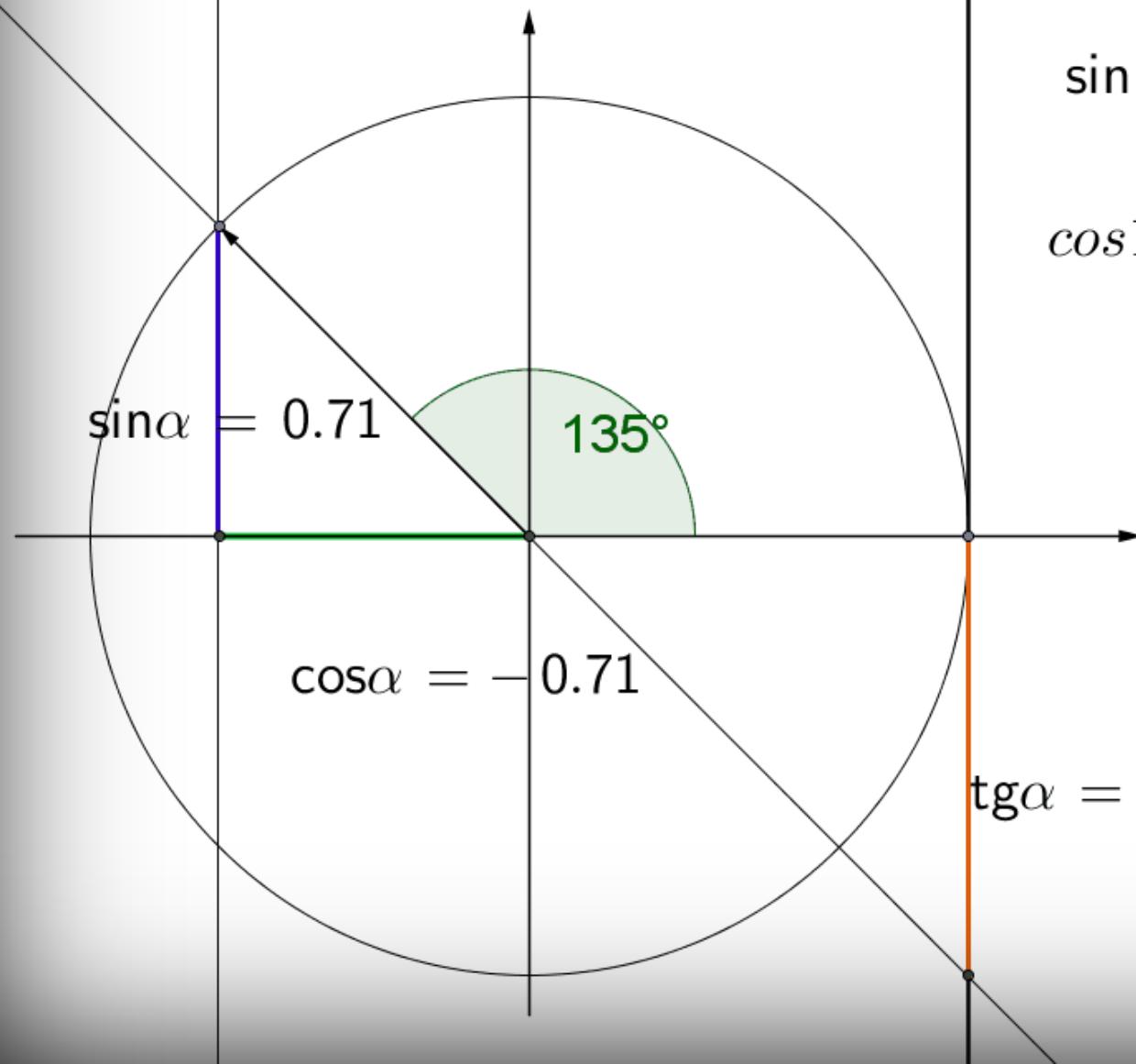
$$\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$$

intervallumon!



		A	B	C	D
1.cs.	$f(x) = \sin x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$
2.cs.	$f(x) = \cos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0
3.cs.	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\alpha = 135^\circ$$



$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.71$$

$$\tan \alpha = -1$$