

Háromszögek

Általános háromszög

AI – súlyvonal

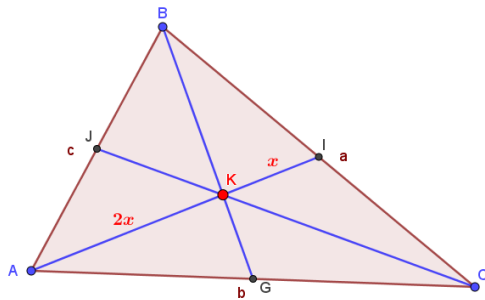
I – a BC oldal felezőpontja

K – a BG, CJ és AI súlyvonalak metszéspontja

$$\frac{AK}{KI} = \frac{BK}{KG} = \frac{CK}{KJ} = \frac{2}{1}$$

Tétel: A háromszög bármely súlyvonala felezi a háromszög területét. Azaz

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABI}$$

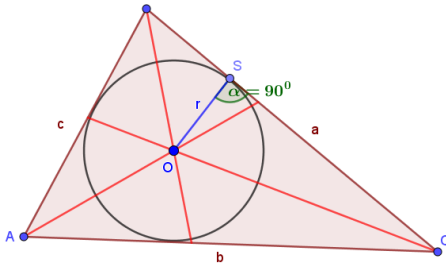


AO – szögfelező

O – a szögfelezők metszéspontja, ami a háromszögbe írt kör középpontja

OS = r – a beírt kör sugara

$$OS \perp a$$



Derékszögű háromszög

a, b – befogók, c – átfogó

BD – súlyvonal: $BD = \frac{1}{2}c$

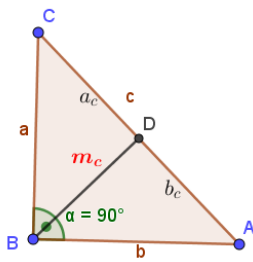
Pitagorasz-tétel: $c^2 = a^2 + b^2$

Magasság- és befogótételek:

$$m_c^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c; \quad b^2 = c \cdot b_c$$

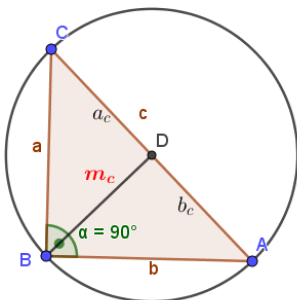
Thalész-tétel: Ha egy kör átmérőjének két végpontját a körvonal bármely másik pontjával összekötjük, akkor derékszögű háromszöget kapunk. Az átmérő a derékszögű háromszög átfogója.



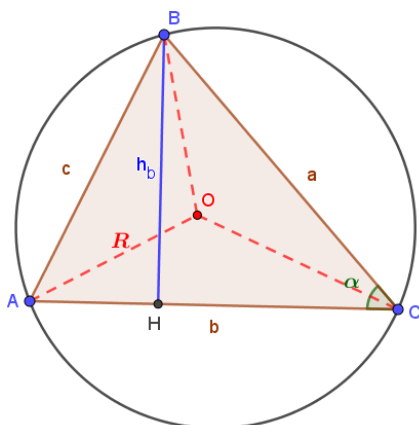
D – a kör középpontja

CA – a kör átmérője

Thalész tételének a megfordítása is igaz: Egy derékszögű háromszög köré írt kör középpontja mindig az átfogójának felezőpontja lesz. Az átfogó a kör átmérője.



A háromszög területe



$$T = \frac{1}{2} b \cdot h_b$$

$$T = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \alpha$$

Hérón képlete:

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ ahol}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$T = \frac{abc}{4R}, \text{ ahol } R - \text{ a körülírt kör sugara}$$

$$T = r \cdot p, \text{ ahol } r - \text{ a beírt kör sugara}$$

Megjegyzés: A háromszög köré írt kör középpontja (O) az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

Téglalap, négyzet területe

Legyenek a téglalap oldalai a és b hosszúságúak. Akkor a **téglalap területe**

$$T = ab$$

Mint hogy a négyzet téglalap, melynek oldalai egyenlők, ezért a **négyzet területe**

$$T = a^2$$

Paralelogramma, rombusz területe

Legyenek a paralelogramma nem párhuzamos oldalai a és b hosszúságúak, az a oldalra bocsájtott magasság h_a , az oldalak által bezárt szög pedig α . Akkor a **paralelogramma területe**

$$T = a \cdot h_a$$

$$T = ab \cdot \sin \alpha$$

Mivel a rombusz olyan paralelogramma, melynek oldalai egyenlők, ezért a **rombusz területe**

$$T = a \cdot h_a$$

$$T = a^2 \cdot \sin \alpha$$

$$T = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}, \text{ ahol } d_1, d_2 - \text{ a rombusz átlói}$$

Trapéz területe

Legyenek a trapéz alapjai (párhuzamos oldalai) a és b hosszúságúak, magassága h . Akkor a trapéz területe

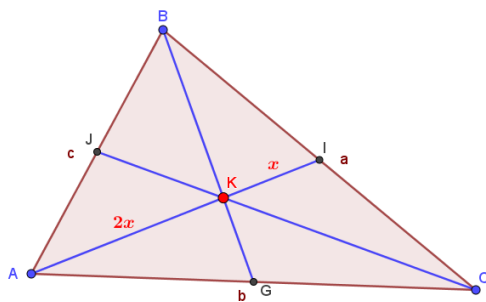
$$T = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Ha m jelöli a trapéz középvonalát, akkor $m = \frac{a+b}{2}$. Így

$$T = m \cdot h$$

Kör kerülete és területe	
Az R sugarú kör kerülete	$k = 2\pi R$
Ha d jelöli a kör átmérőjét, akkor $d=2R$.	
A kör területe	$T = \pi R^2$

1. feladat: Az ABC háromszögben AI súlyvonal, $KI = 4\text{ cm}$, $\angle CAI = 30^\circ$, az AC oldal hossza pedig 20 cm (lásd az ábrát). Mekkora az ABC háromszög területe?



Megoldás:

Mivel a súlyvonalak metszéspontja a K pont az AI súlyvonalat $2:1$ arányban osztja, így

$$KI = \frac{AI}{3} \Rightarrow AI = 12\text{ cm}.$$

Mint hogy a háromszög súlyvonala a háromszöget két egyenlő területű háromszögre osztja, ezért először meghatározzuk az ACI háromszög területét.

$$T_{AIC\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot \sin 30^\circ = 60\text{ [cm}^2\text{]}$$

Akkor az ABC háromszög területe:

$$T_{ABC\Delta} = 2 \cdot T_{AIC\Delta} = 120\text{ cm}^2$$

2. feladat: Egy egységnyi területű egyenlő szárú háromszög szárszöge 30° . Mekkora a szára, az alapja és a magassága?

Megoldás:

A feladat feltétele alapján $T_\Delta = 1$. A háromszög területképletét felhasználva kiszámítható a háromszög szárának hossza, alapja és magassága.

Egyrészt, mivel a háromszög egyenlő szárú és a szárszög nem más, mint az egyenlő oldalak által bezárt szög, így bevezetve a szár hosszúságának jelölésére az x -et,

$$T_\Delta = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow$$

$$1 = \frac{1}{4} \cdot x^2 \Rightarrow x = 2.$$

Másrészt egyenlő szárú háromszög lévén az alapon fekvő szögek egyenlők és 75° -osak.

Jelölje a háromszög alapját y . Akkor újra alkalmazva a háromszög területképletét két „ismert” oldal (szár és alap), valamint a köztük lévő szög (75°) ismeretében, kapjuk, hogy

$$T_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot y \cdot \sin 75^\circ \Rightarrow$$

$$1 = y \cdot \sin 75^\circ \Rightarrow y \approx 1,0353$$

Jelölje a háromszög magasságát m . Ismerve, hogy a háromszög területe az egyik oldal és a rá bocsájtott magasság szorzatának fele, azt kapjuk, hogy

$$1 = \frac{1}{2} \cdot y \cdot m = \frac{1}{2} \cdot 1,0353 \cdot m \Rightarrow m \approx 1,9319.$$

3. feladat: Egy rombusz átlóinak aránya 5:12, kerülete 260 cm. Mekkora a rombusz átlói és a rombusz területe?

Megoldás:

Mivel a rombusz minden oldala egyenlő hosszúságú, így a kerülete az oldalának 4-szerese. Tehát a rombusz oldala $260:4 = 65$ [cm].

Legyenek a rombusz átlói $5x$ és $12x$. A rombusz átlói merőlegesek és felezik egymást, ezért azok 4 darab egybevágó derékszögű háromszögre osztják a rombuszt. Ezek mindegyikére igaz a Pitagorasz-tétel, azaz

$$\left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{12x}{2}\right)^2 = 65^2.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve nyerjük a

$$25x^2 + 144x^2 = 16900$$

egyenletet. Innen kapjuk, hogy

$$x^2 = 100 \Rightarrow x = 10.$$

Akkor a rombusz átlói 50 cm és 120 cm hosszúak.

A rombuszt alkotó derékszögű háromszögek területe a befogók félszorzata. A háromszög befogói pedig az átlók felei, azaz 25 cm és 60 cm hosszúak.

$$T_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 60 = 750 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Akkor a rombusz területe

$$T_{rombusz} = 4 \cdot T_\Delta = 3000 \text{ [cm}^2\text{]}$$

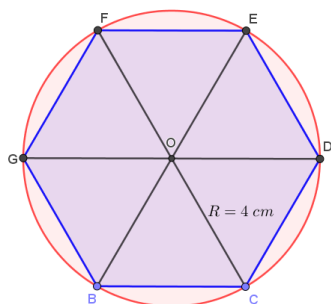
4. feladat: Egy kör alakú bádoglemezből, melynek 4 cm a sugara, a lehető legnagyobb területű szabályos hatszöget szeretnénk kivágni. Mekkora a selejt bádoglemez területe?

Megoldás:

A selejt bádoglemez területe a körlap területének és a hatszög területének a különbségével egyenlő.

$$T_{selejt} = T_{kör} - T_{hatszög}$$

Az ábra is jól mutatja, hogy a hatszöget 6 egybevágó, egyenként 60° -os szárszöggel rendelkező egyenlő szárú (ilyen szárszög mellett egyenlő oldalú) háromszög alkotja. Ezért



$$T_{hatszög} = 6 \cdot T_{háromszög}$$

A háromszög területét a két oldala és az általuk bezárt szög ismeretében számítjuk ki:

$$T_{háromszög} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} [cm^2].$$

Így a hatszög területe

$$T_{hatszög} = 6 \cdot 4\sqrt{3} \approx 41,56 [cm^2].$$

A körlap területe

$$T_{körlap} = \pi R^2 = 16\pi \approx 50,24 [cm^2].$$

Akkor a selejt területe

$$T_{selejt} \approx 8,67 [cm^2].$$

5. feladat: Le szeretnénk parkettázni egy $15 m^2$ -es szobát. Hány darab $34,5 cm$ hosszú és $4 cm$ széles parkettára van szükség?

Megoldás:

Egy darab parketta lefed

$$T = 34,5 \cdot 4 = 138 [cm^2]$$

területet.

Mivel $15 m^2 = 150\,000 cm^2$, ezért egy ilyen területű szoba parkettázásához

$$150\,000 : 138 \approx 1087$$

darab parketta kell.

6. feladat: Egy medence alapja olyan téglalap, melynek területe $7,75 m^2$, kerülete pedig $11,2 m$. Mekkora a medence hosszúsága és szélessége?

Megoldás:

Ha a téglalap kerülete $11,2 m$, akkor az oldalai hosszának összege $5,6 m$. Legyen a medence hosszúsága a , szélessége b . Akkor

$$a = 5,6 - b.$$

Mivel a téglalap területe $7,75 m^2$, ezért

$$b(5,6 - b) = 7,75.$$

A zárójel bontása után nyerjük a

$$-b^2 + 5,6b - 7,75 = 0$$

egyenletet.

Felhasználva a másodfokú egyenlet megoldóképletét, kapjuk, hogy

$$b_1 = 3,1 \text{ vagy } b_2 = 2,5.$$

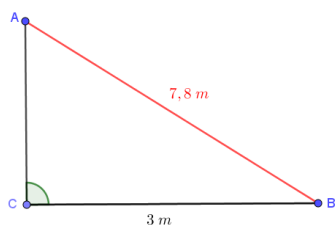
Ekkor a téglalap másik oldala

$$a_1 = 2,5 \text{ vagy } a_2 = 3,1.$$

Tehát a medence alapjának méretei $2,5 \text{ m}$ és $3,1 \text{ m}$.

7. feladat: Egy $7,8 \text{ m}$ hosszúságú létrát úgy támasztottak az épület falához, hogy a létra talajjal érintkező pontja az épülettől 3 m távolságra van. Milyen magasan van az épület falán a létra másik pontja?

Megoldás:



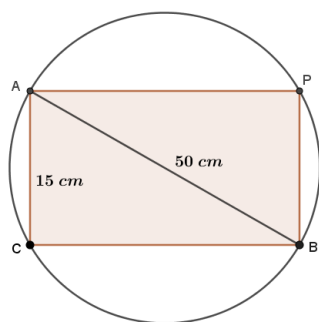
Az AC szakasz hosszát keressük. Az ABC háromszög derékszögű, C csúcsú derékszöggel. A Pitagorasz-tételből adódik, hogy

$$AC^2 = 7,8^2 - 3^2 = 51,84.$$

Akkor $AC = 7,2 \text{ m}$.

8. feladat: Egy 25 cm sugarú kör farönkből olyan gerendát szeretnénk fűrészelni, melynek vastagsága 15 cm és szélessége egy ilyen farönkből kifűrészelt maximumális szélességgel egyezik meg. Milyen széles a lehető legszélesebb gerenda?

Megoldás:



A farönk átmérője

$$AB = 2 \cdot R = 2 \cdot 25 = 50 \text{ [cm]}$$

Az ABC derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel segítségével a keresett szélesség kiszámítható:

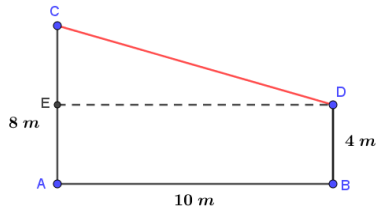
$$BC^2 = 50^2 - 15^2 = 2275 \Rightarrow$$

$$BC = \sqrt{2275} \approx 47,6 \text{ [cm]}$$

9. feladat: Két gyárépület között anyagszállításhoz lejtős csúszdát építettek. Határozzuk meg a csúszda hosszát, ha a gyárépületek távolsága 10 m és a csúszda végeit 8 m , illetve 4 m magasan helyezték el!

Megoldás:

A feladatnak megfelelő ábra jól mutatja, hogy a csúszda hossza nem más, mint egy derékszögű trapéz hosszabbik szára (lásd az ábrán).



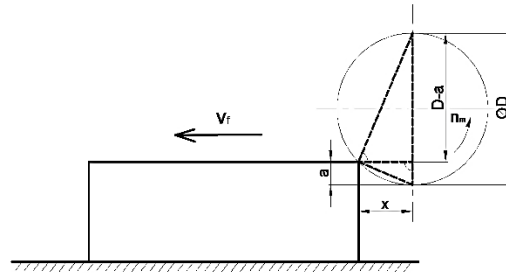
A CED derékszögű háromszögből a csúszda hossza a Pitagorasz-tétel alkalmazásával meghatározható.

Mint hogy $CE = CA - AE = 8 - 4 = 4 \text{ [m]}$, ezért

$$CD^2 = DE^2 + CE^2 \Rightarrow CD^2 = 100 + 16 = 116.$$

Akkor $CD = \sqrt{116} \approx 11 \text{ [m]}$.

10. feladat: Az alábbi ábra egy palástmarási technológiát ábrázol. Határozzuk meg az x szakasz hosszát, ha $a = 8 \text{ mm}$, $D = 100 \text{ mm}$!



Megoldás:

A Thalész-tétel alapján a körben lévő háromszög derékszögű. Ennek átfogójára, mely a kör átmérője, magasságot bocsájtottunk. Ez az x szakasz. A derékszögű háromszögre vonatkozó magasság-tétel alapján

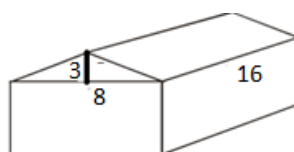
$$x^2 = a(D - a) \Rightarrow x^2 = 736$$

Tehát

$$x \approx 27 \text{ [mm]}.$$

11. feladat: Egy háztető metszete egyenlő szárú háromszög, melynek alapja 8 m , az alapra bocsájtott magassága 3 m . A tető hossza 16 m (lásd az ábrán).

- Hány m^2 cserép szükséges a tető befedéséhez?
- Legfeljebb mekkora sugarú körablak helyezhető el a háromszögben?
- Mekkora lesz egy ilyen ablak kerülete és területe?



Megoldás:

a) Jelölje a tető ferde oldalának hosszát (a háromszög szárát) x . Felhasználva, hogy az egyenlő szárú háromszög magassága egyúttal súlyvonal is, illetve a Pitagorasz-tételt, azt kapjuk, hogy

$$x^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ [m]}$$

Akkor a két tetőlap összterülete

$$T = 2 \cdot (16 \cdot 5) = 160 \text{ [m}^2\text{]}$$

Tehát $160 \text{ [m}^2\text{]}$ cserép szükséges a tető befedéséhez.

b) A keresett kör a háromszögbe írt kör. A beírt kör sugara (r) és a háromszög területe (T) között fennáll a

$$T = p \cdot r$$

egyenlőség, ahol p – a háromszög félkerülete. A feladat feltétele szerint

$$p = \frac{8 + 2 \cdot 5}{2} = 9 \text{ [m]}$$

A háromszög minden oldalának ismeretében a terület Hérón-képletének segítségével kiszámítható:

$$T = \sqrt{9 \cdot (9 - 5) \cdot (9 - 5) \cdot (9 - 8)} = \sqrt{144} = 12 \text{ [m}^2\text{]}$$

Akkor a háromszögben elhelyezhető körablak sugara

$$r = \frac{T}{p} \Rightarrow r = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \text{ [m]}.$$

c) Ennek az ablaknak a kerülete

$$K_{\text{körablak}} = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \approx 8,37 \text{ [m]}$$

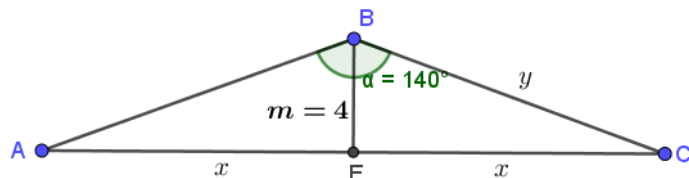
a területe pedig

$$T_{\text{körablak}} = \pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \approx 5,58 \text{ [m}^2\text{]}$$

12. feladat: Az ábrán egy fal egy része látható. A FJG ív egy 1 m sugarú körív, a $ABCD$ négyszög téglalap. Az HF és GI szakaszok merőlegesek az HI szakaszra. $HF = GI = 2 \text{ m}$, $HI = 1,6 \text{ m}$, $AB = 2,75 \text{ m}$. Számítsuk ki az J pont távolságát az AD mennyezetig!

c) A tartórúdon méterenként kampókat helyeztünk el, amelyekre fel tudjuk akasztani a mozgásérzékelő lámpáját. Alulról számítva hányadik kampót használjuk, ha azt akarjuk, hogy a vízszintes talajon ne világítson meg a lámpa 100m^2 -nél nagyobb területet?

Megoldás:



a) A BC szakasz hosszát keressük. Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért a $CBE\angle = 70^\circ$ (a háromszög BE magassága egyben szögfelező és súlyvonal is). Akkor a BEC derékszögű háromszög BC befogója

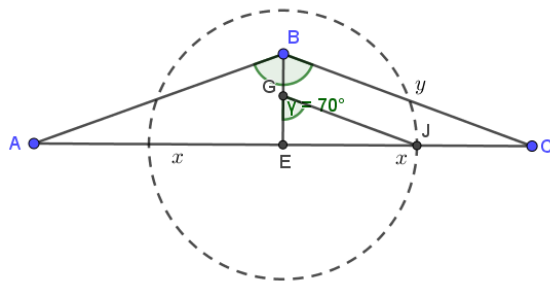
$$y = BC = \frac{4}{\cos 70^\circ} \approx 11,7 \text{ [m]}.$$

b) A legtovábbi megvilágított pont a talajon a rúd aljától (E pont) a C pont lesz. Akkor a BEC derékszögű háromszög EC befogója

$$x = EC = 4 \cdot \tan 70^\circ \approx 11 \text{ [m]}.$$

Tehát az érzékelő lámpája azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától 15 m távolságra van már nem világítja meg.

c) A lámpa által a vízszintes talajon megvilágított terület egy E középpontú EJ sugarú kör alakú terület.



A feladat feltétele alapján ennek a körnek a területe nem lehet nagyobb 100 m^2 -nél. Akkor

$$\pi r^2 \leq 100 \Rightarrow r \leq \sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5,65 \text{ [m]}.$$

A kérdéses kampó számát a GE magasság adja meg, ami a GEJ derékszögű háromszög egyik befogója. A másik befogója pedig a kör sugara. Mivel a $GEJ \Delta \sim BEC \Delta$, ezért a $EGJ\angle = 70^\circ$.

Ekkor

$$GE = \frac{EJ}{\tan 70^\circ} \Rightarrow GE = \frac{5,65}{\tan 70^\circ} \approx 2,05 \text{ [m]}.$$

Tehát az első vagy a második kampóra kell akasztani az érzékelőt.

14. feladat: Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal 13 cm hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya $2:1$.

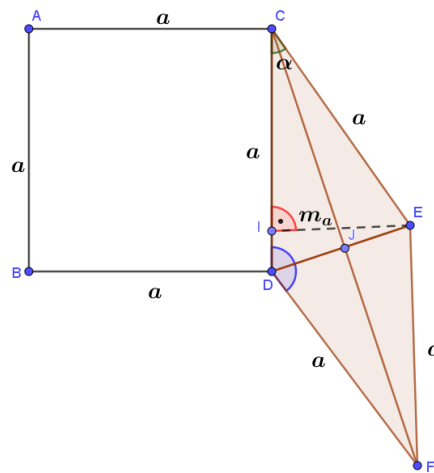
a) Mekkora a rombusz magassága?

b) Mekkora a rombusz szögei?

c) Milyen hosszú a rombusz hosszabbik átlója? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Megoldás:

Legyen a közös oldal $a = 13\text{ cm}$.



a) A négyzet területe

$$T_{\text{négyzet}} = a^2,$$

a rombusz területe

$$T_{\text{rombusz}} = a \cdot m_a$$

A feladat feltétele alapján

$$\frac{a^2}{a \cdot m_a} = \frac{2}{1} \Rightarrow m_a = 6,5\text{ [cm]}.$$

b) A CIE derékszögű háromszögből

$$\sin \alpha = \frac{m_a}{a} \Rightarrow \sin \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Akkor a rombusz másik szöge

$$\angle CDF = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

c) Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra és felezik a rombusz szögeit, ezért a CDJ derékszögű háromszögből

$$\cos 15^\circ = \frac{CJ}{a} \Rightarrow CJ = 13 \cdot \cos 15^\circ.$$

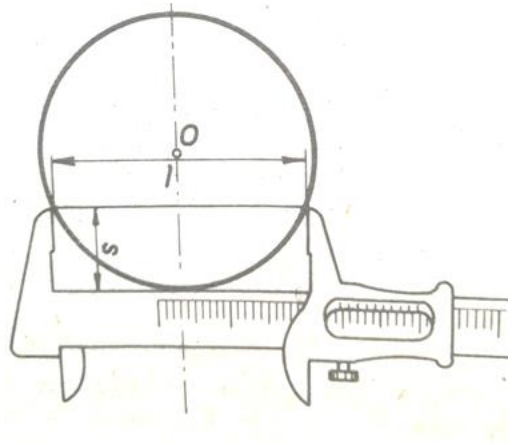
Akkor a rombusz hosszabbik átlója

$$CF = 2 \cdot CJ \approx 25,11\text{ [cm]}.$$

15. feladat: Kör alakú tárgyak átmérőjének meghatározásához az ábrán látható tolómérőt használják. A tolómérő szárainak hossza $s = 25 \text{ mm}$.

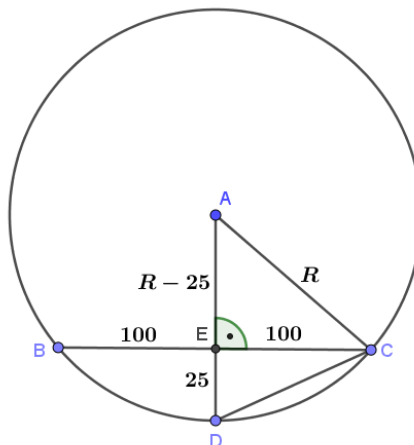
a) Határozzuk meg az átmérő hosszát, ha a tolómérő végpontjainak távolsága $l = 200 \text{ mm}$!

b) Határozzuk meg, hogyan függ a d átmérő s -től és l -től!



Megoldás:

a) Megszerkesztjük a kör $AD = AC = R$ sugarait, illetve a CD húrt. A kör sugara felezi a BC húrt, így $BE = EC = 100 \text{ mm}$.



Akkor az AEC derékszögű háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt

$$R^2 = (R - 25)^2 + 100^2.$$

Felhasználva, hogy $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ és rendezve az egyenletet, a következő, az adottal ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$50R = 10625 \Rightarrow R = 212,5 \text{ [mm]}.$$

Akkor a kör átmérője

$$d = 2R = 425 \text{ [mm]}.$$

b) Amennyiben az s és l szakaszok nem ismertek, akkor a kör átmérőjét a következő módon tudjuk megadni s és l függvényében: az AEC derékszögű háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt azt kapjuk, hogy

$$R^2 = (R - s)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Rendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$2Rs = \frac{4s^2 + l^2}{4}.$$

Innen

$$R = \frac{4s^2 + l^2}{8s} \Rightarrow d = 2R$$