

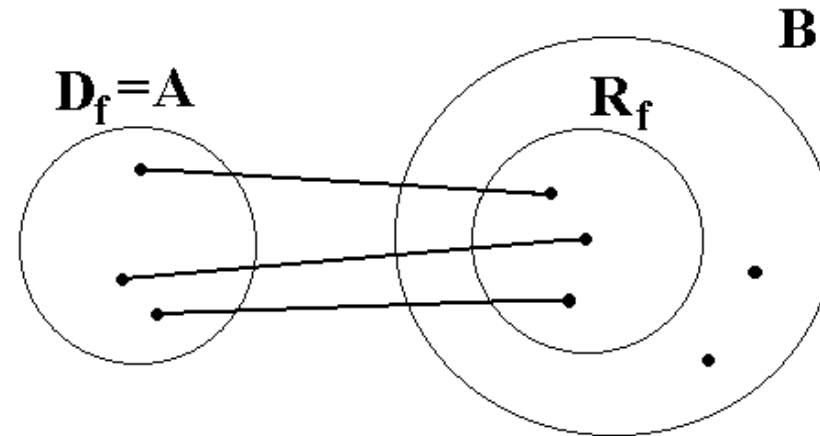
Függvények

2025.11.13.

❑ Nevezetes függvényosztályok

❑ A függvény fogalma, tulajdonságok

- Függvény megadása
- Értelmezési tartomány
- Értékkészlet
- Zérushelyek
- Monotonitás
- Szélsőértékek
- Paritás
- Periódus



$$f : A \rightarrow B$$

□ hatványfüggvények

Legyen a egy rögzített valós szám. Az

$$f(x)=x^a, x\in\mathbb{R} \text{ vagy } 0<x\in\mathbb{R} \text{ vagy } 0\leq x\in\mathbb{R}$$

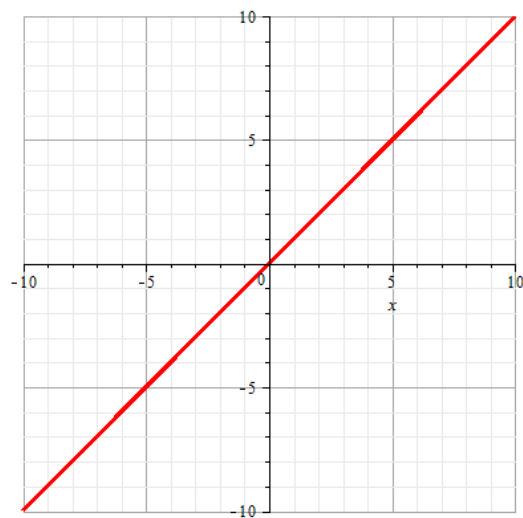
formulával megadott függvényeket hatványfüggvényeknek nevezzük.

a a hatványfüggvény kitevője.

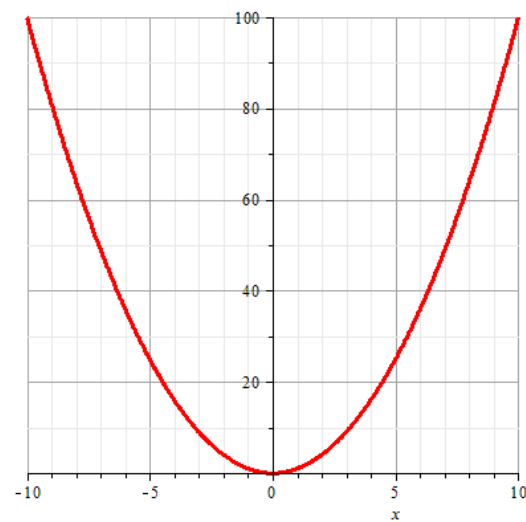
Az értelmezési tartomány (a legbővebb halmaz, ahol az adott hatványfüggvény értelmezhető) a kitevőtől függ.

Példák pozitív egész kitevőű hatványfüggvényekre

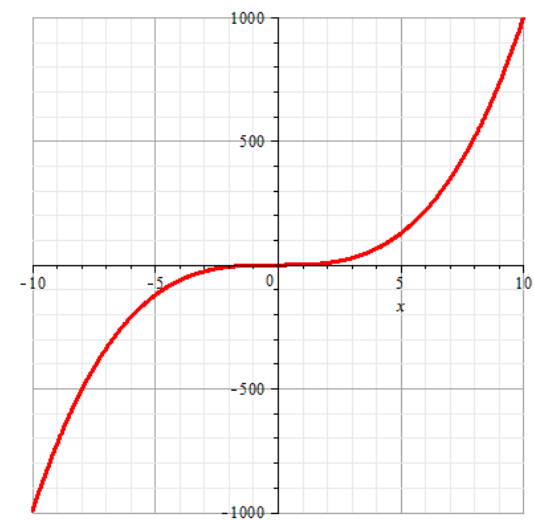
$$f(x) = x$$



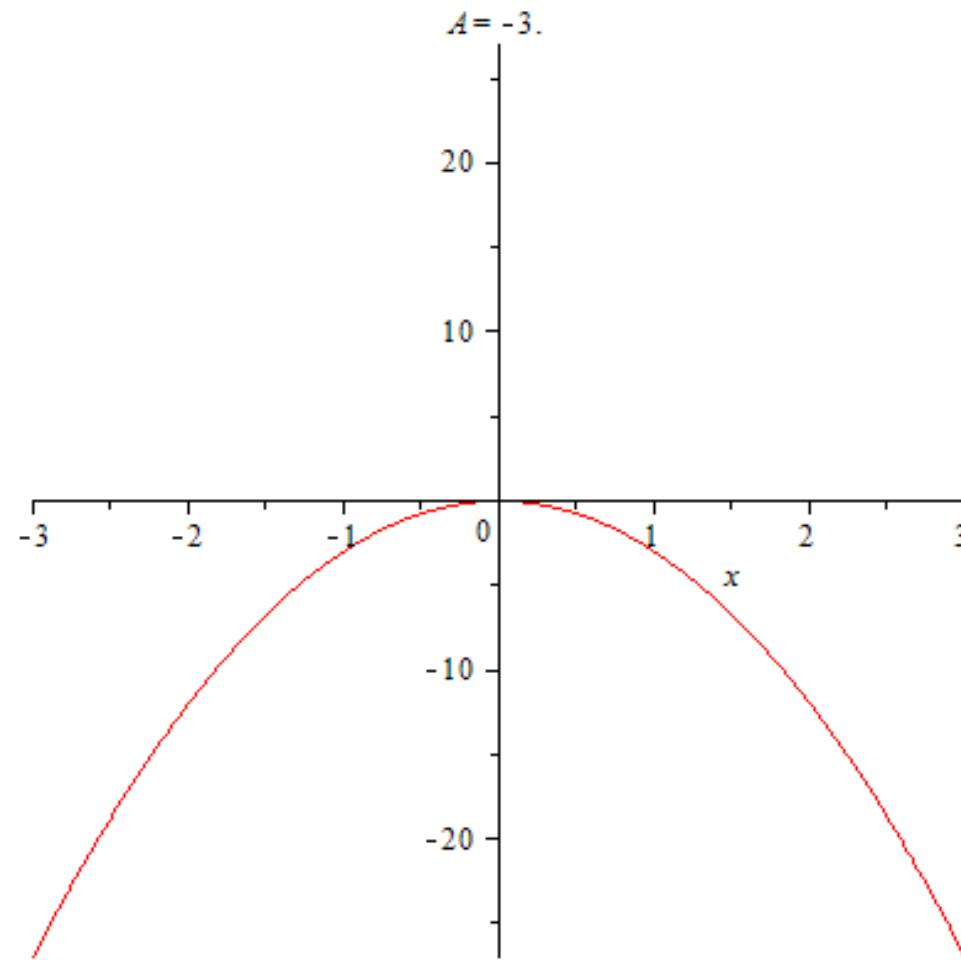
$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = x^3$$



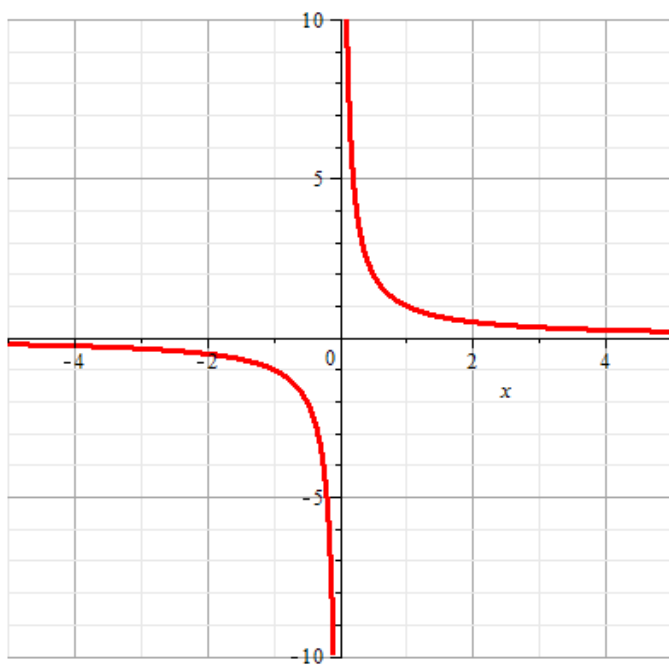
$$x \in \mathbb{R}, f(x) = A \cdot x^2$$



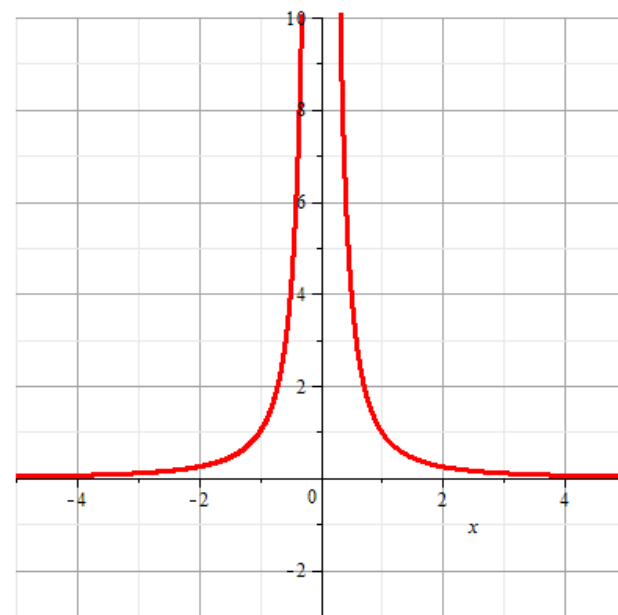
(Animáció)

Példák negatív egész kitevőű hatványfüggvényekre

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (= x^{-1})$$



$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (= x^{-2})$$

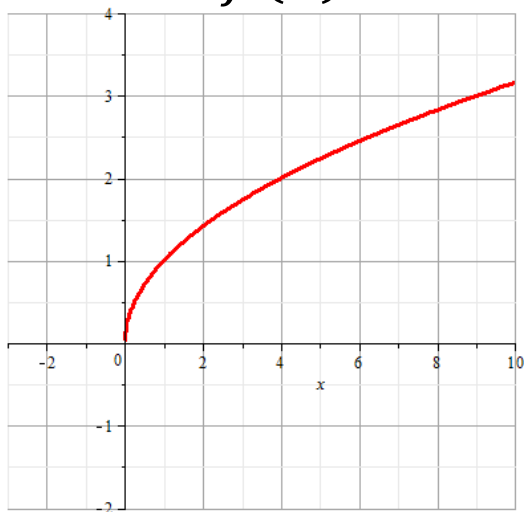


Példa közösleges tört kitevőjű hatványfüggvényekre

!!! A közösleges törtek tizedestört alakja:

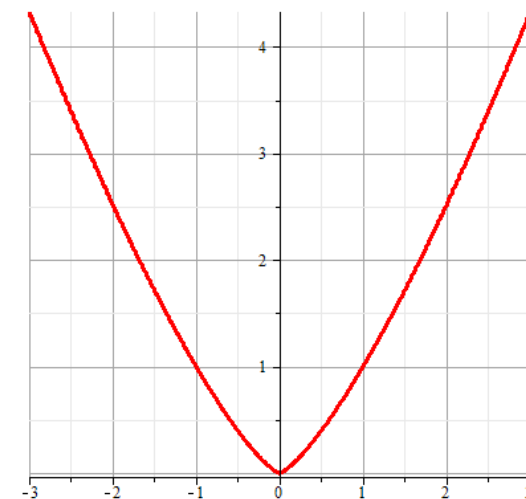
- véges
- végtelen, szakaszos

$$f(x) = \sqrt{x} \quad f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

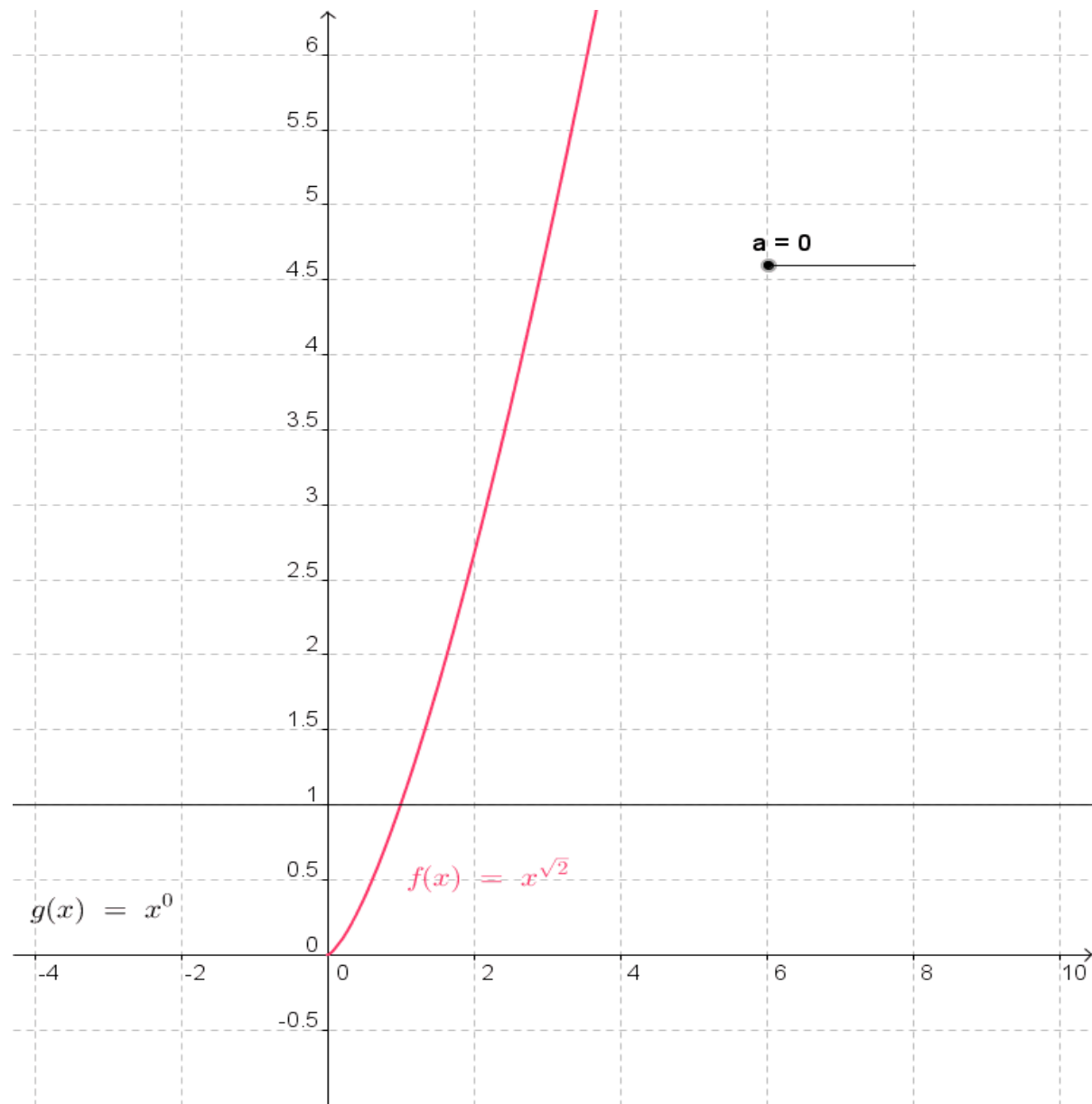


x	0	1	4	9
f(x)	0	1	2	3

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} \quad f(x) = x^{\frac{4}{3}}$$



x	-1	0	1	8
f(x)	1	0	1	16



A következőkben néhány valós függvényeket jellemző tulajdonságot definiálunk.

Definíció

Egy f valós függvényt felülről korláatosnak nevezünk, ha R_f értékkészlete - mint számhalmaz - felülről korlátos. R_f maximumát, ha létezik, f maximumának nevezzük.

Definíció

Egy f valós függvényt alulról korláatosnak nevezünk, ha R_f értékkészlete alulról korlátos. R_f minimumát, ha létezik, f minimumának nevezzük.

Definíció

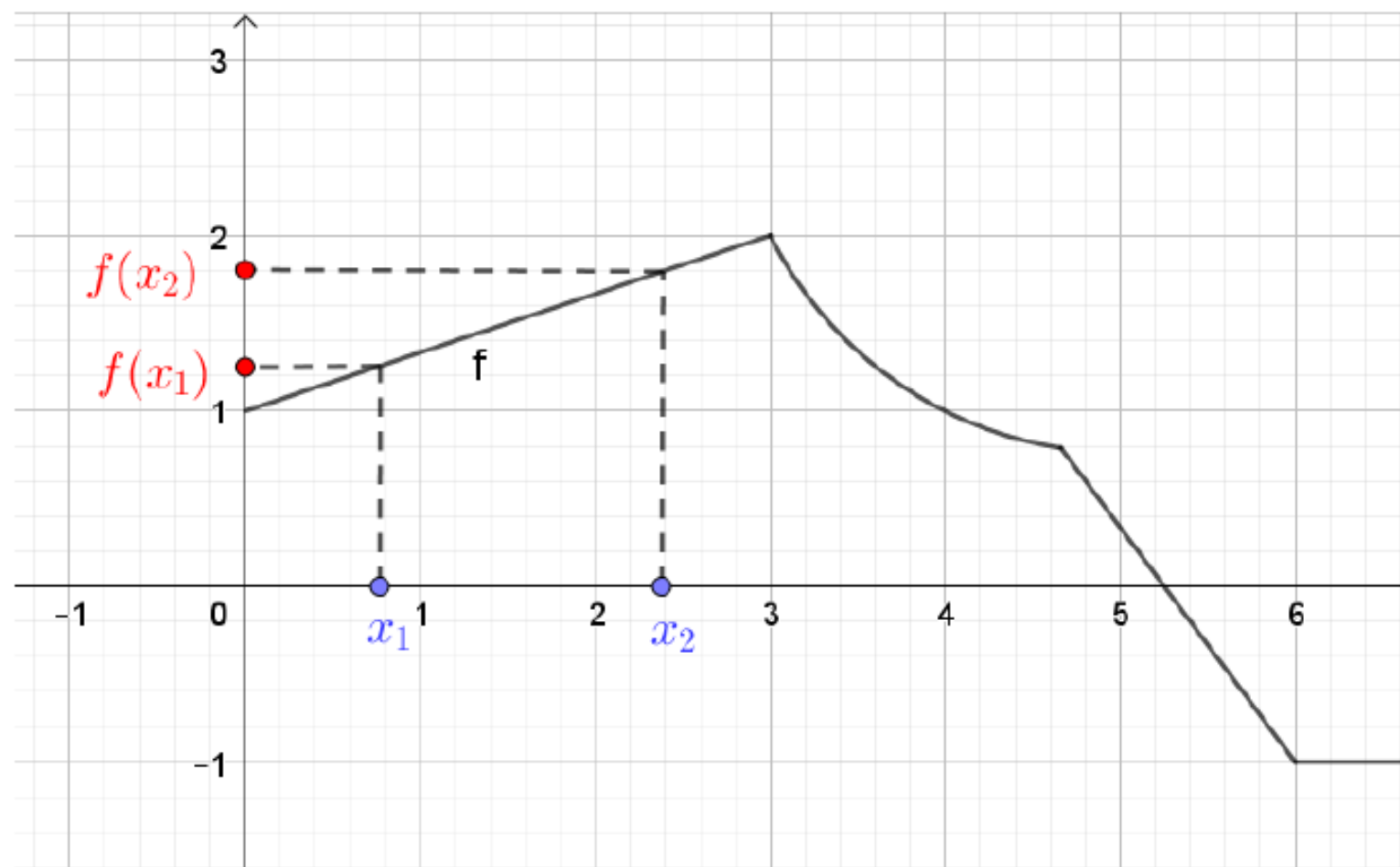
Az $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény monoton növekvő, ha bármely $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Az $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény szigorúan monoton növekvő, ha bármely $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.

$$R_f = [-1, 2]$$

$$\min f = -1$$

$$\max f = 2$$



f szigorúan monoton növekvő a $[0, 3]$ intervallumon

Definíció

Az $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.

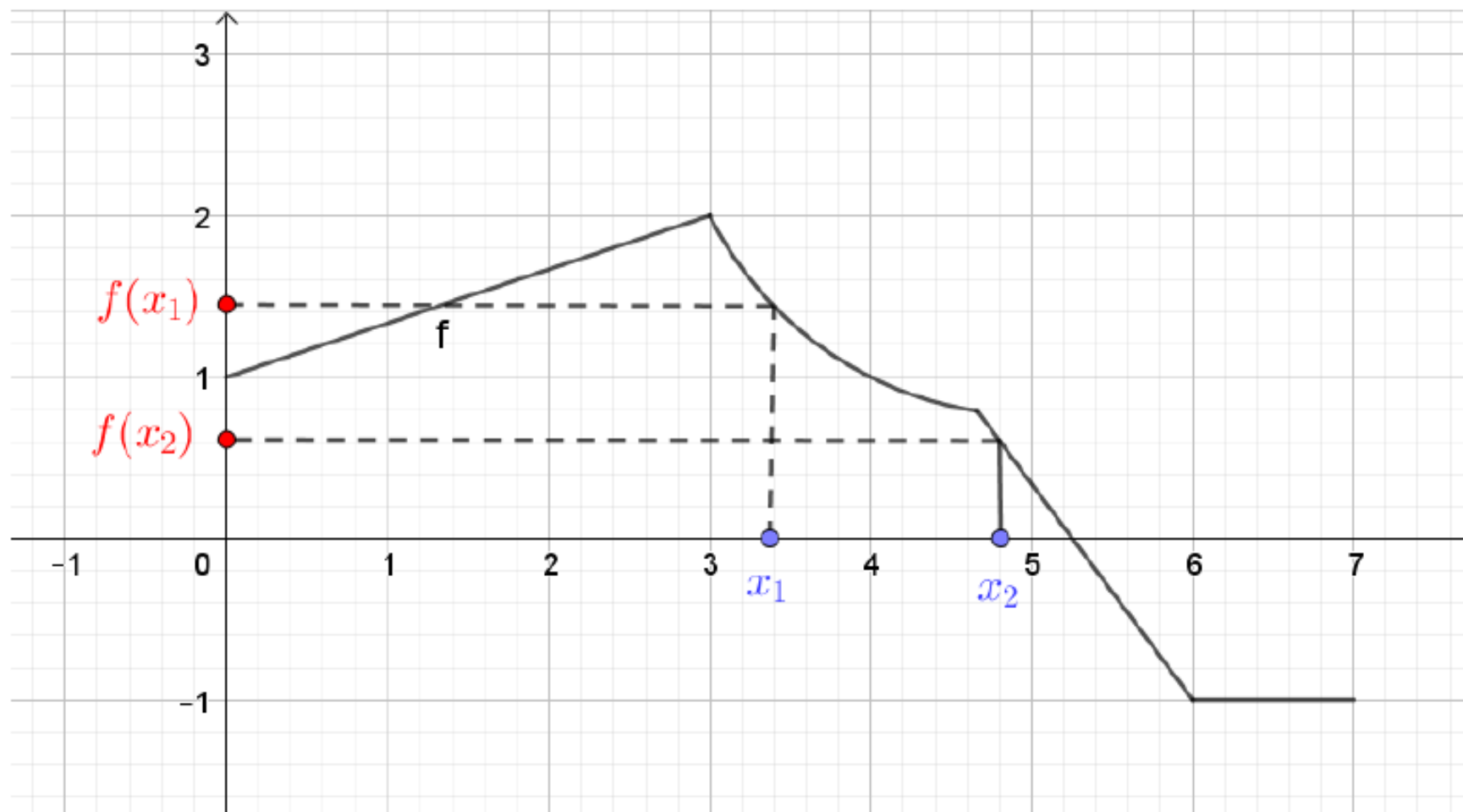
Az $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Definíció

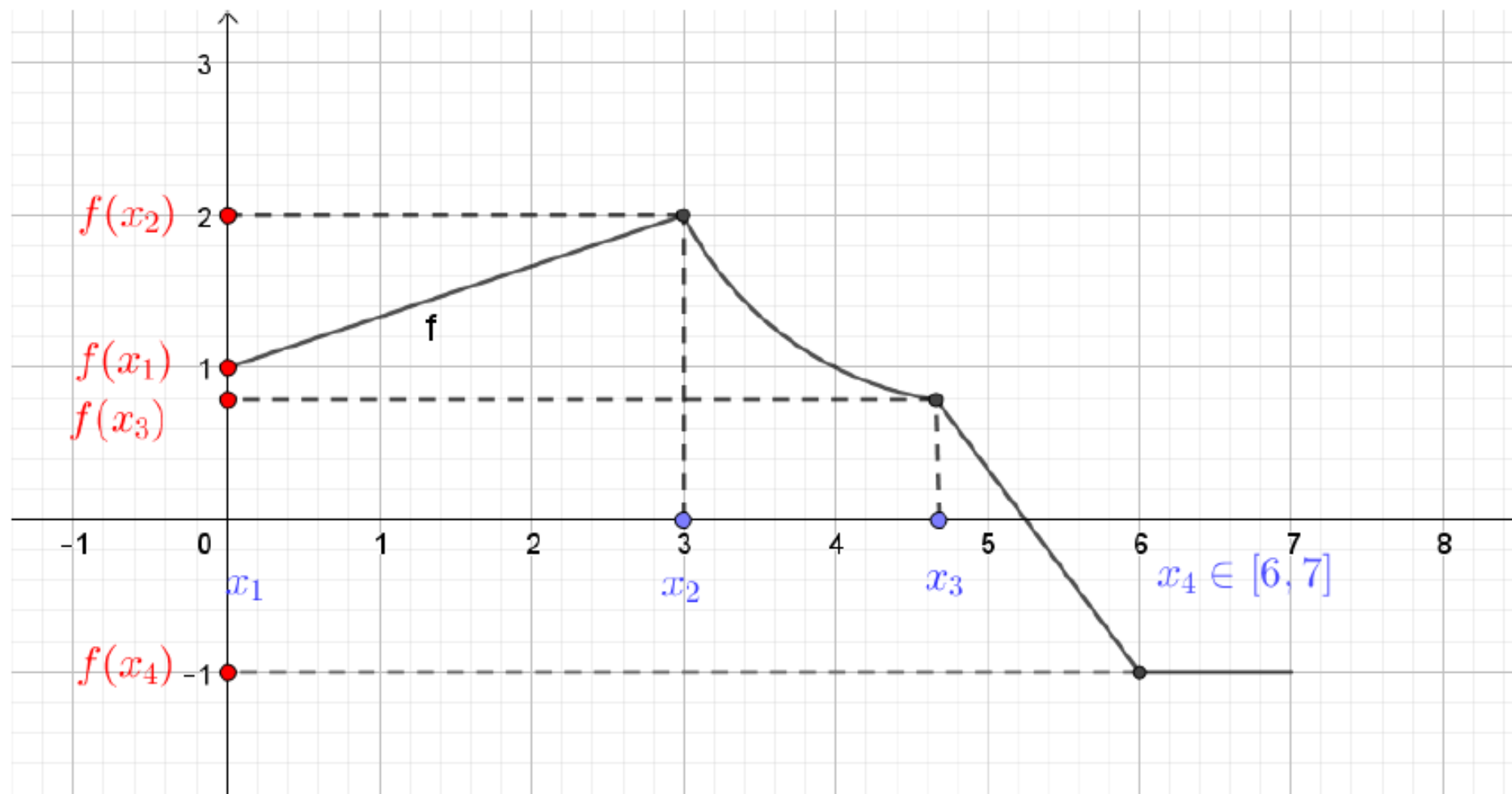
Legyen $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény és $x_0 \in D$. Ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül minden $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ esetén, akkor f -nek lokális maximuma van x_0 -ban.

Definíció

Legyen $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény és $x_0 \in D$. Ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül minden $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ esetén, akkor f -nek lokális minimuma van x_0 -ban.



f szigorúan monoton csökkenő a $[3, 6]$ intervallumon
 f monoton csökkenő a $[3, 7]$ intervallumon



- f -nek lokális minimuma van az x_1 helyen és a $[6, 7]$ intervallum minden pontjában.
- f -nek lokális maximuma van az x_2 helyen.
- x_3 nem lokális minimumhely, nem lokális maximumhely.
- f -nek a (globális vagy abszolút) maximumhelye x_2 . f -nek a (globális vagy abszolút) minimumhelye az $[6, 7]$ intervallum minden pontja.

Definíció

Egy $D \subseteq \mathbb{R}$ halmazt szimmetrikusnak mondunk, ha $x \in D$ esetén $-x \in D$.

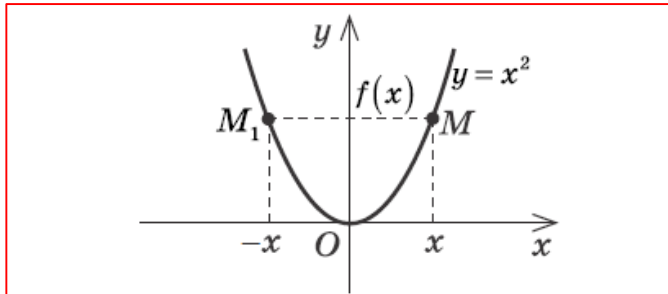
Definíció

Legyen $D \subseteq \mathbb{R}$ szimmetrikus és $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. Ha $f(x) = f(-x)$ minden $x \in D$ esetén, akkor f -et páros függvénynek mondjuk. Ha $-f(x) = f(-x)$ minden $x \in D$ esetén, akkor f -et páratlan függvénynek mondjuk.

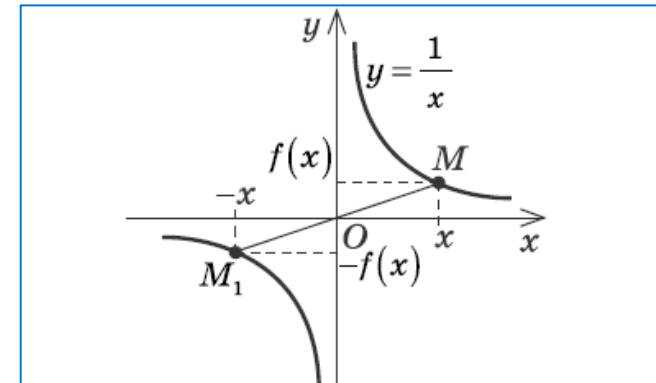
Definíció

Legyen $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. Ha létezik olyan pozitív valós p szám, hogy $f(x + p) = f(x)$ teljesül minden $x \in D$ esetén, akkor f -et periodikus függvénynek nevezzük. A legkisebb ilyen tulajdonságú p számot f periódusának mondjuk.

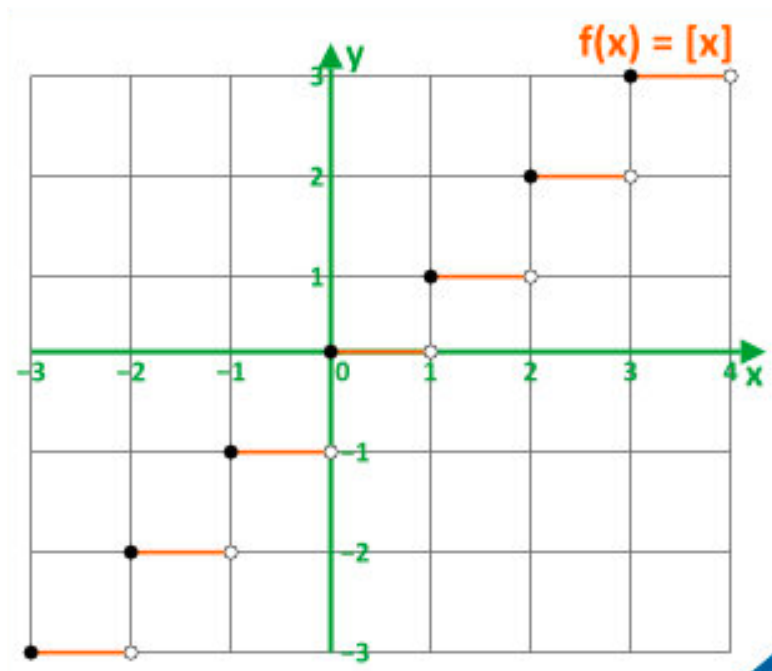
Páros függvény



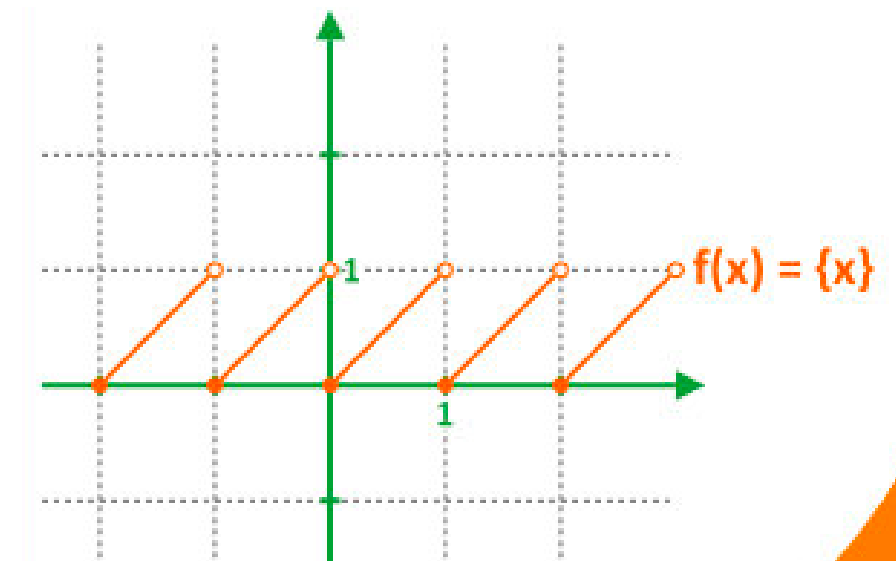
Páratlan függvény



Nem páros, nem páratlan függvény



$$\{x\} = x - [x]$$

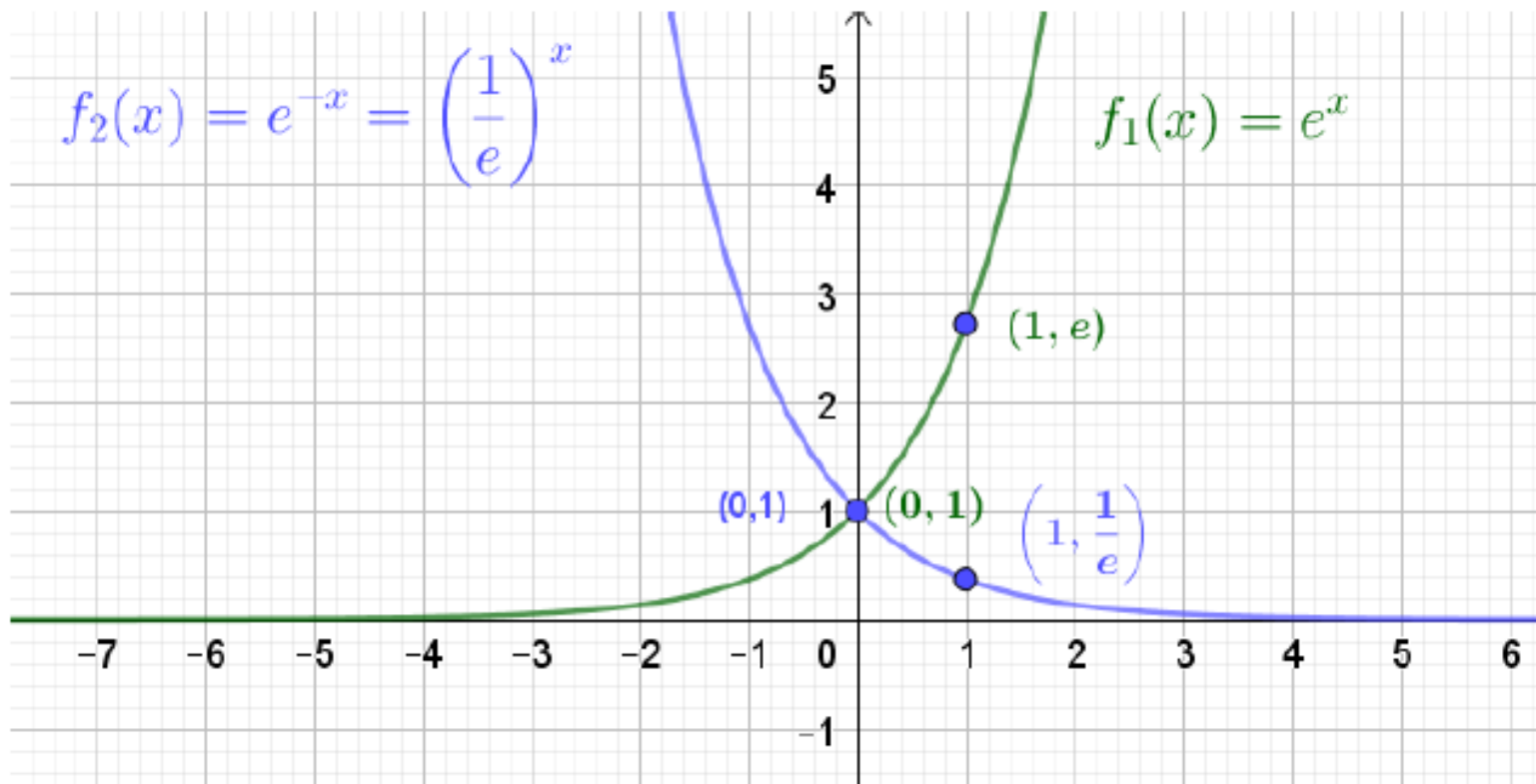


Periodikus függvény

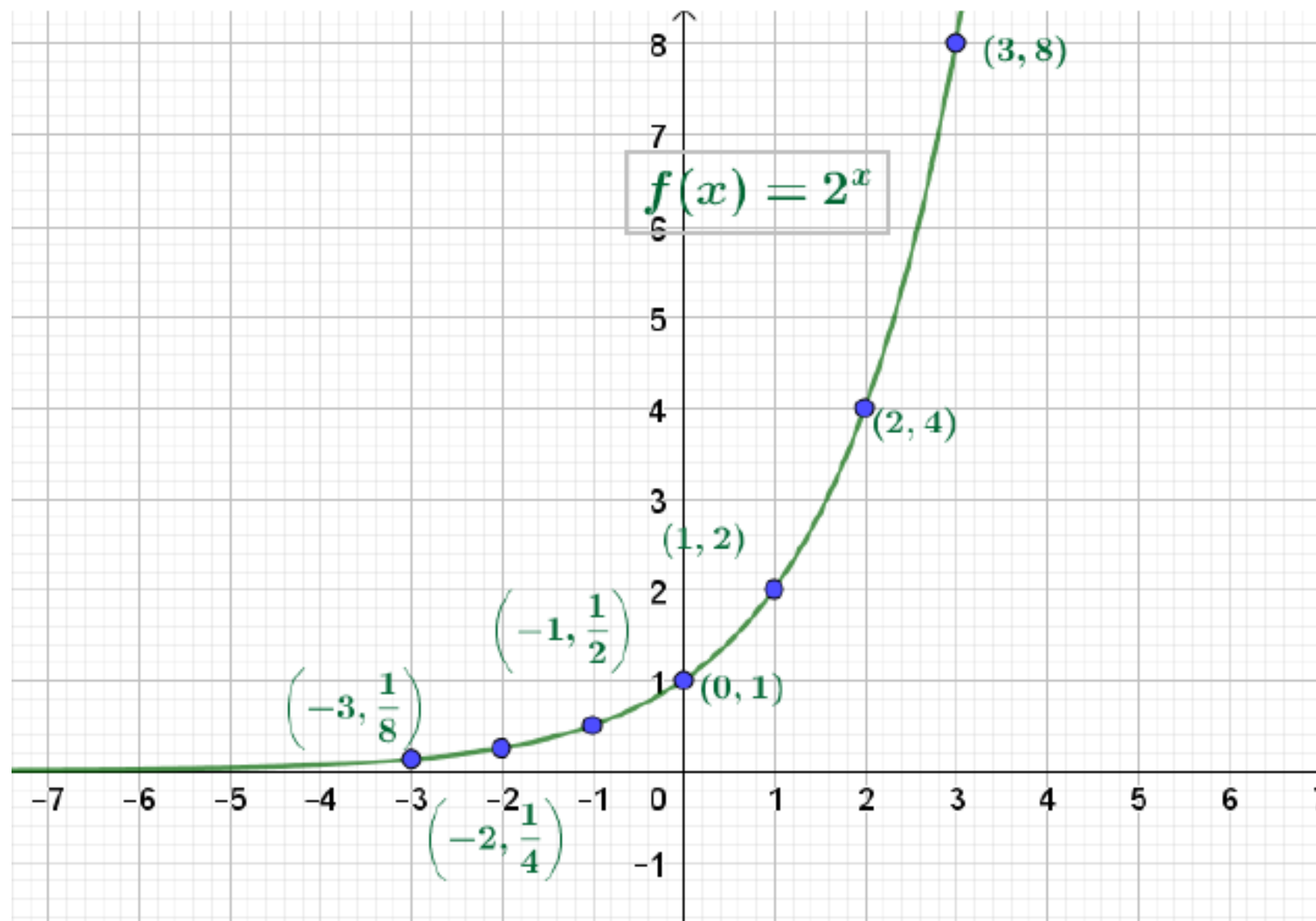
□ Exponenciális függvények: $f(x)=a^x$, $x \in \mathbb{R}$

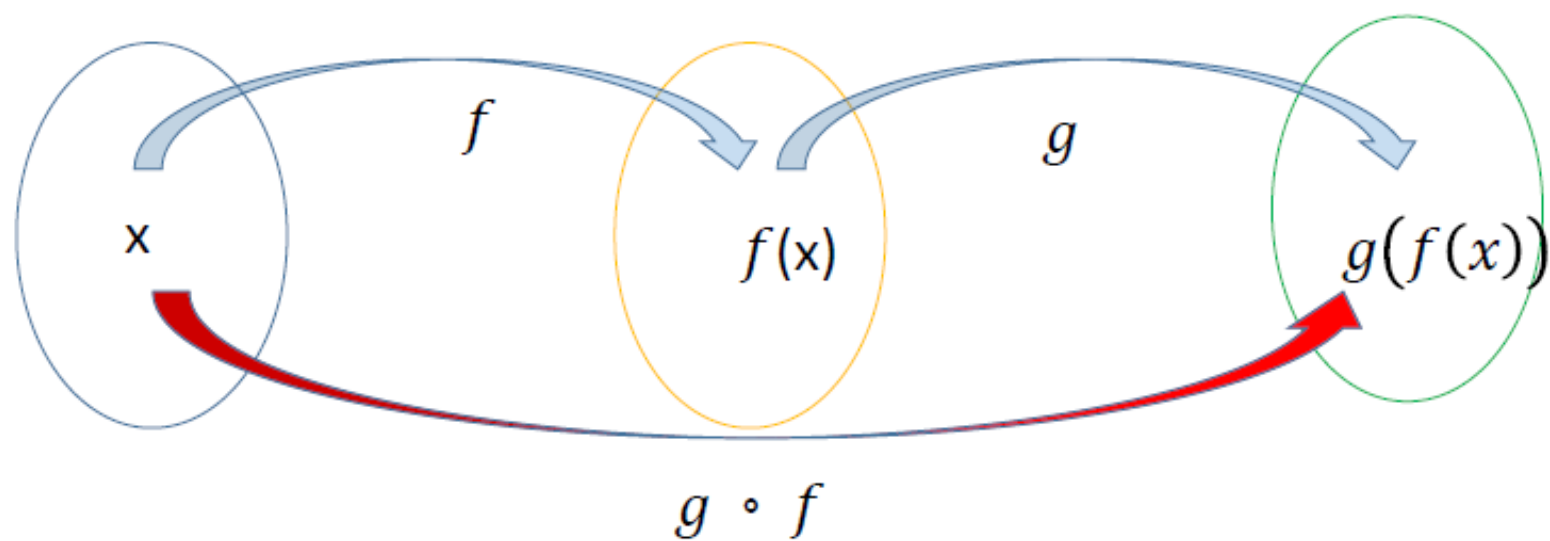
$0 < a < 1$ esetén sz. m. csökken,

$a > 1$ esetén sz. m. nő.



$$e \approx 2,72$$





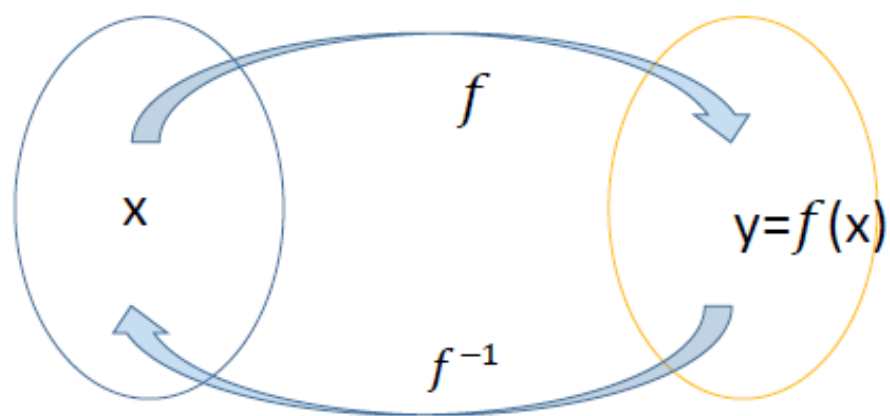
$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = x^2$$



$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2$$



$$f(x) = 2^x$$

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$



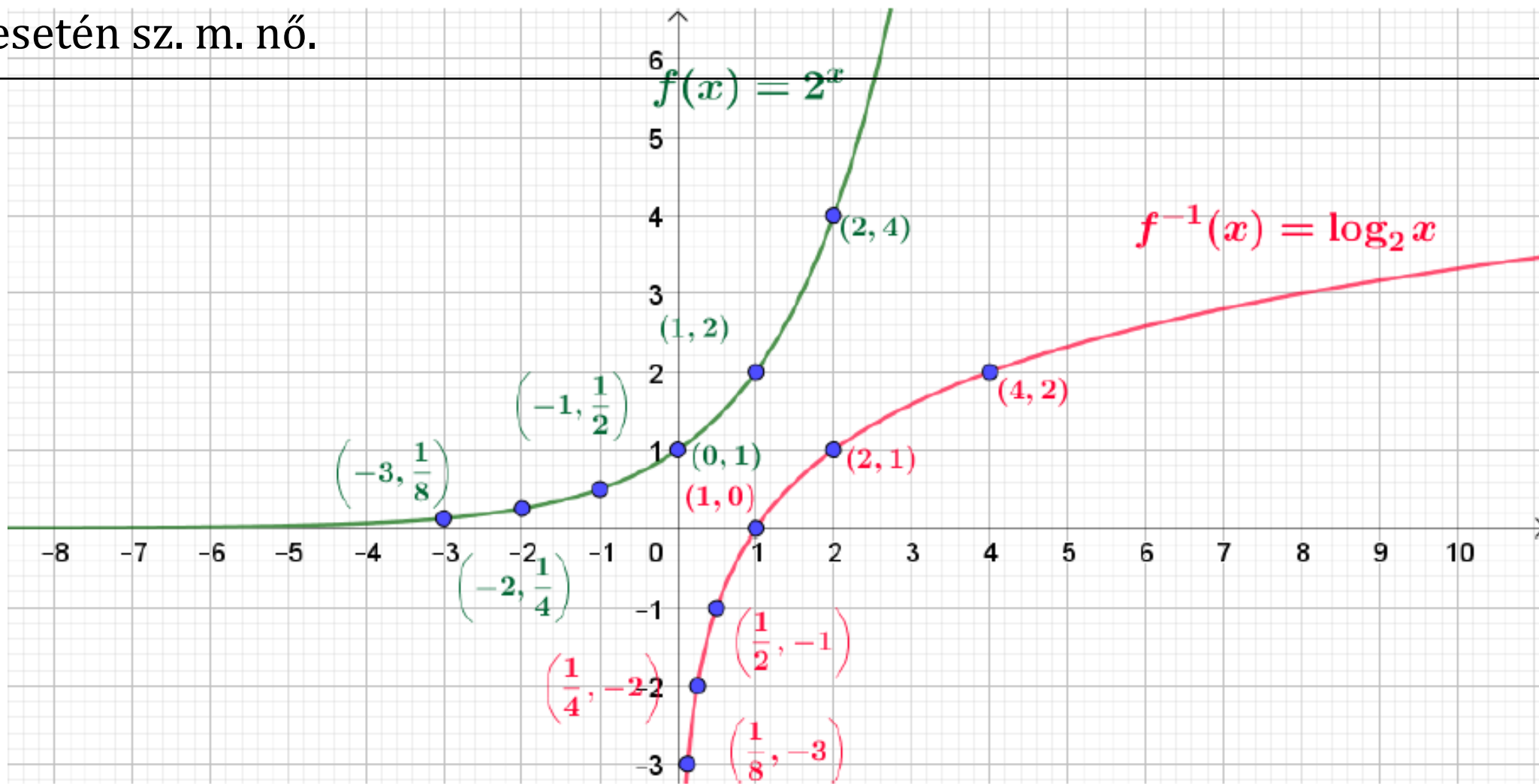
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2^x) = \log_2 2^x = x$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x$$

□ Logaritmus függvények: $f(x) = \log_a x$, $x \in \mathbb{R}^+$

$0 < a < 1$ esetén sz. m. csökken,

$a > 1$ esetén sz. m. nő.

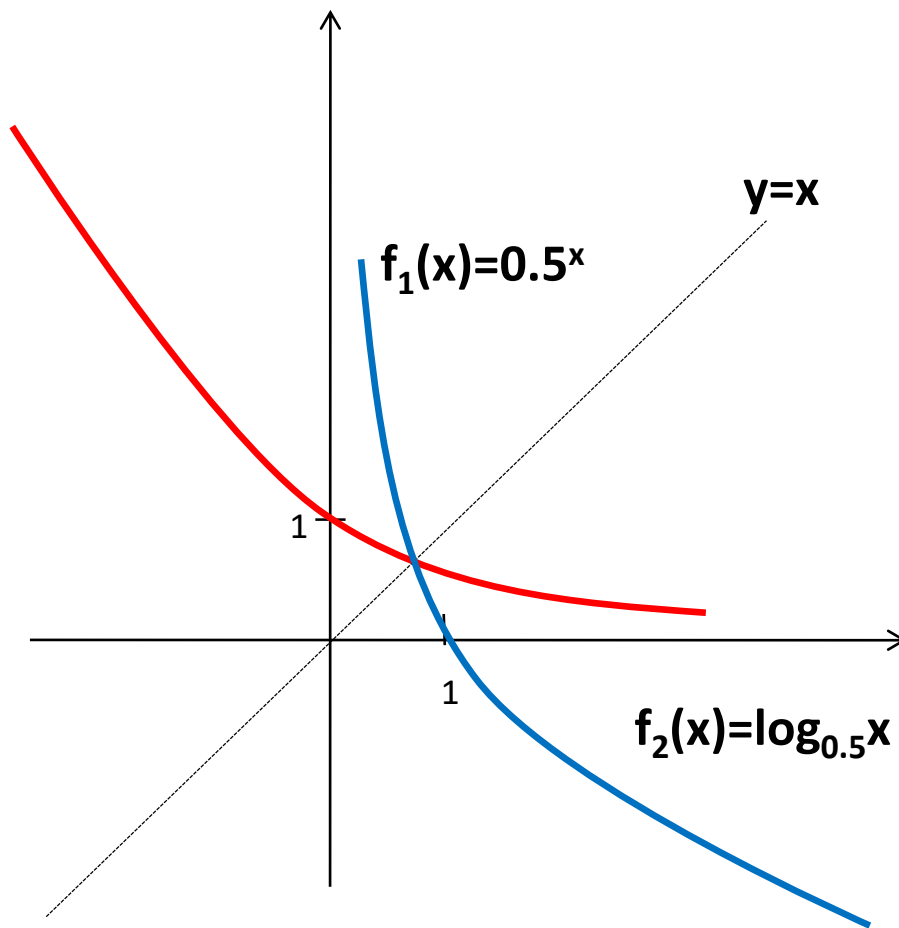


$$x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.5^x$$

$$0 < a < 1$$

$$x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \log_{0.5} x$$

x	0.5^x
-1	2
0	1
1	0.5



x	$\log_{0.5} x$
2	-1
1	0
0.5	1

$$0.5^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

$$\log_{0.5} 0.25 = \log_{0.5} 0.5^2 = 2$$

Egyenlet	Hogyan kapjuk a gráfot
$y = f(x) + c \quad (c > 0)$	feltoljuk az $y = f(x)$ gráfját c egységgel
$y = f(x) - c \quad (c > 0)$	letoljuk az $y = f(x)$ gráfját c egységgel
$y = f(x + c) \quad (c > 0)$	balra toljuk az $y = f(x)$ gráfját c egységgel
$y = f(x - c) \quad (c > 0)$	jobbra toljuk az $y = f(x)$ gráfját c egységgel
$y = -f(x)$	tükrözzük az $y = f(x)$ gráfját az x -tengelyre
$y = f(-x)$	tükrözzük az $y = f(x)$ gráfját az y -tengelyre
$y = a \cdot f(x) \quad (a > 1)$	nyújtjuk az $y = f(x)$ gráfját függőlegesen a -szorosára
$y = a \cdot f(x) \quad (0 < a < 1)$	zsugorítjuk az $y = f(x)$ gráfját függőlegesen a -szorosára
$y = f(a \cdot x) \quad (a > 1)$	zsugorítjuk az $y = f(x)$ gráfját vízszintesen a -szorosára
$y = f(a \cdot x) \quad (0 < a < 1)$	nyújtjuk az $y = f(x)$ gráfját vízszintesen a -szorosára

□ Polinomok, algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek

n-ed fokú polinom:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

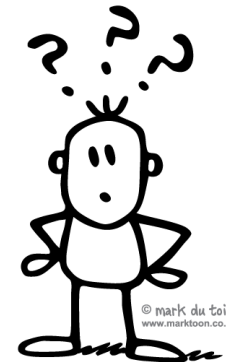
ahol $a_n, \dots, a_0$ rögzített valós számok és $a_n \neq 0$ (: főegyüttható).

Ha $P(x_0) = 0$, akkor x_0 a $P(x)$ polinom zérushelye.

Példák:

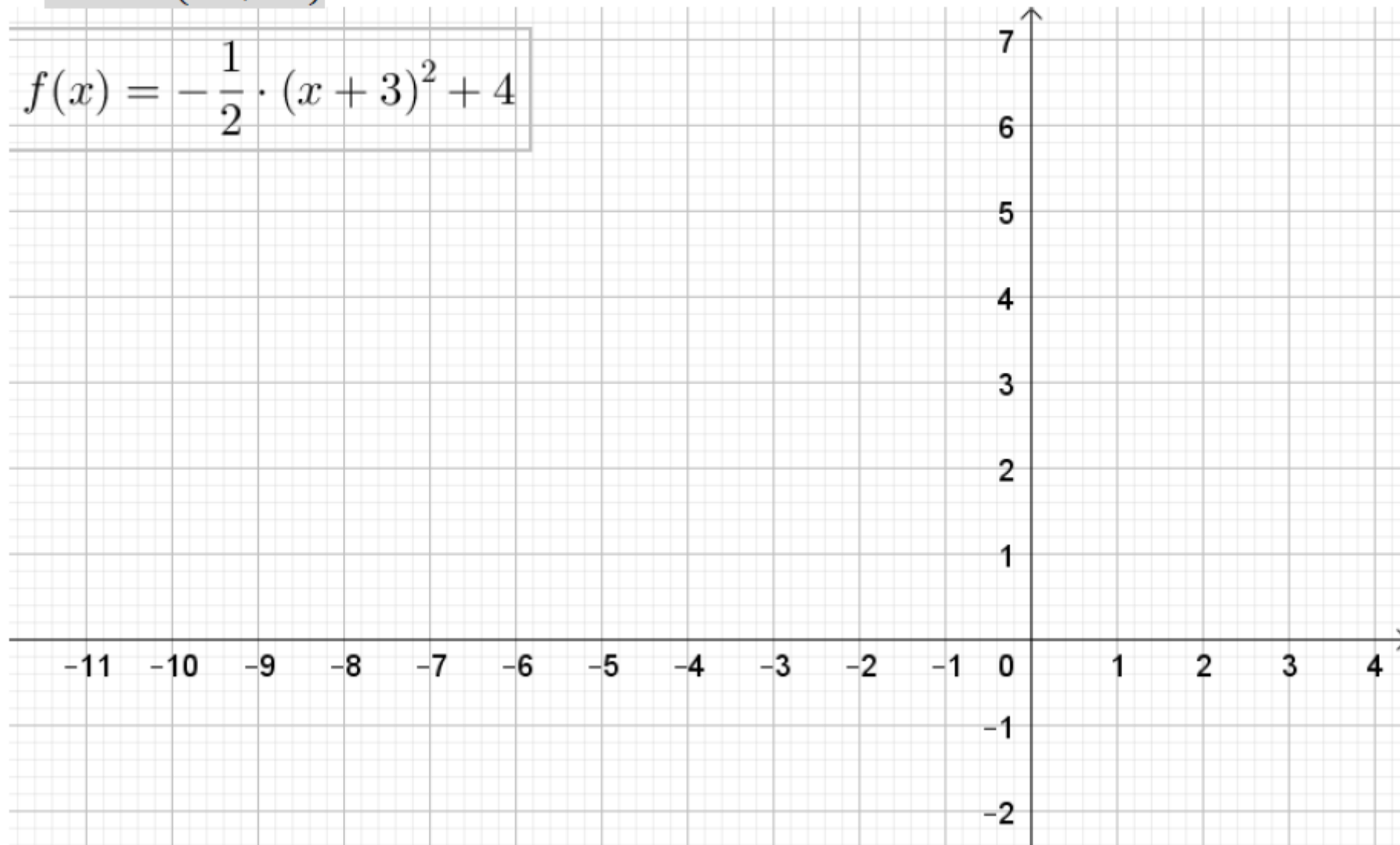
A $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 9$ polinom egy teljes harmadfokú polinom.

A $Q(x) = 6x^4 - 3x^3 - 5$ polinom egy hiányos negyedfokú polinom.



$$x \in D = (-\infty, +\infty)$$

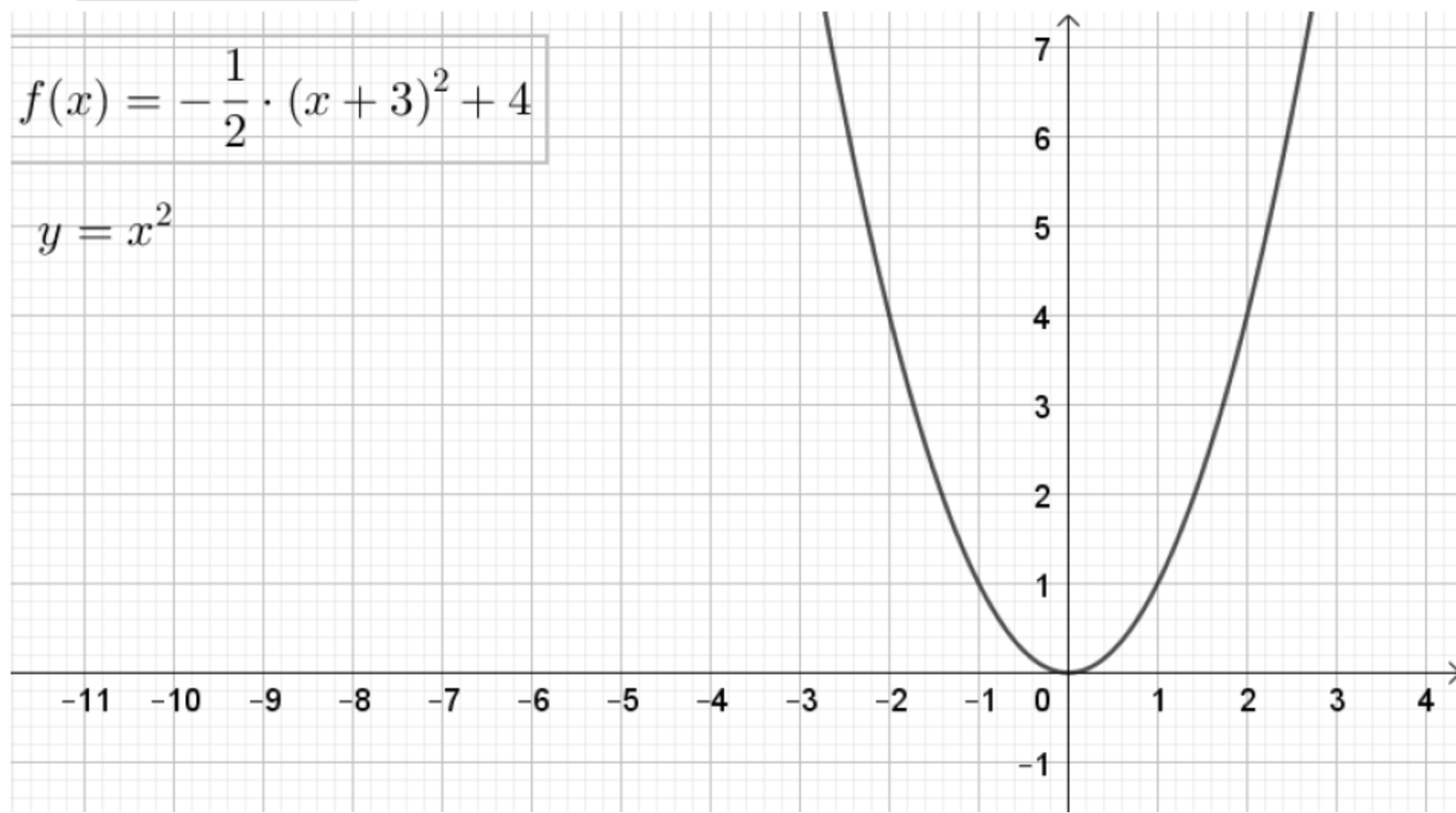
$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 3)^2 + 4$$



$$x \in D = (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 3)^2 + 4$$

$$y = x^2$$

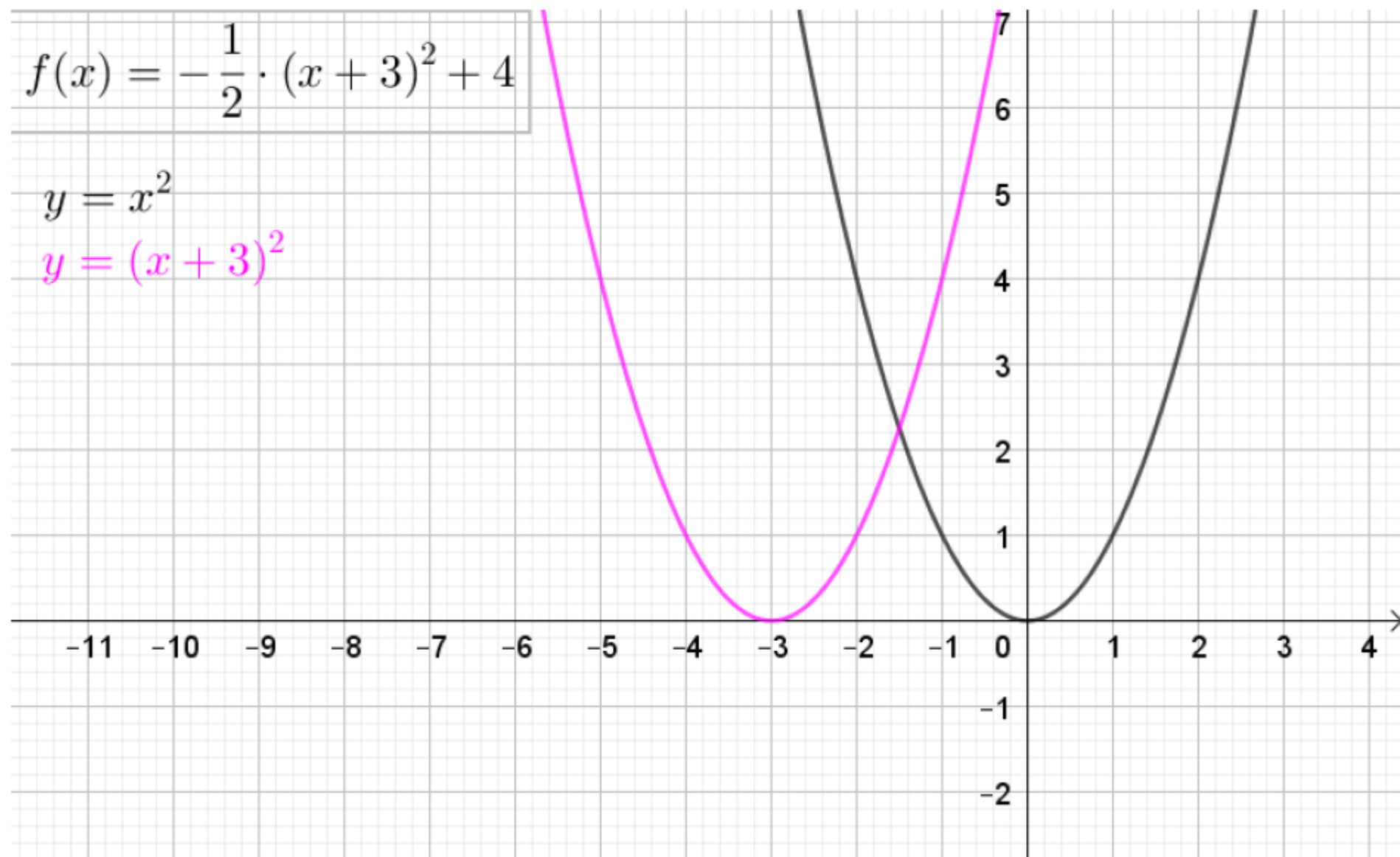


$$x \in D = (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 4$$

$$y = x^2$$

$$y = (x+3)^2$$



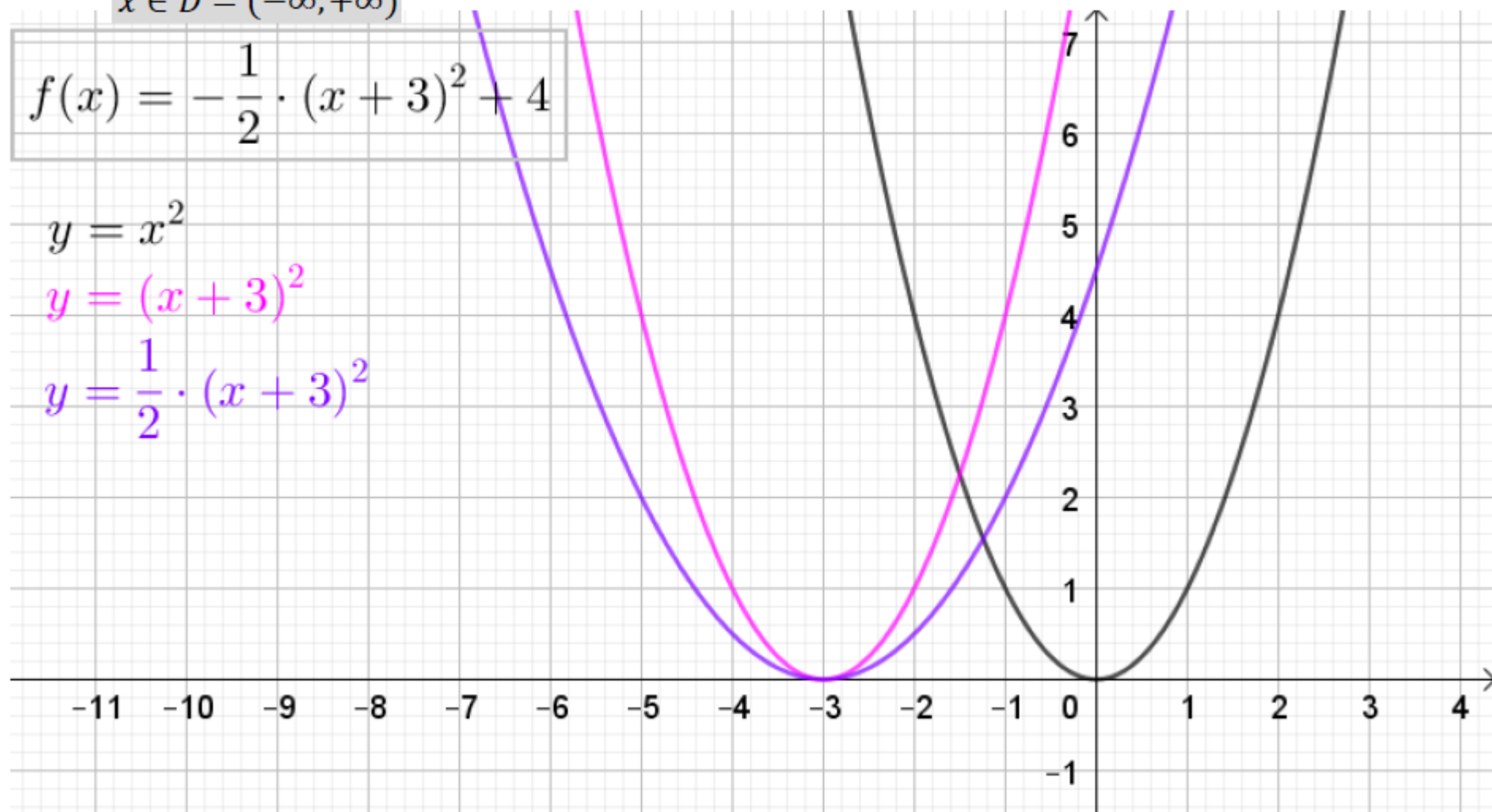
$$x \in D = (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 4$$

$$y = x^2$$

$$y = (x+3)^2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x+3)^2$$



$$x \in D = (-\infty, +\infty)$$

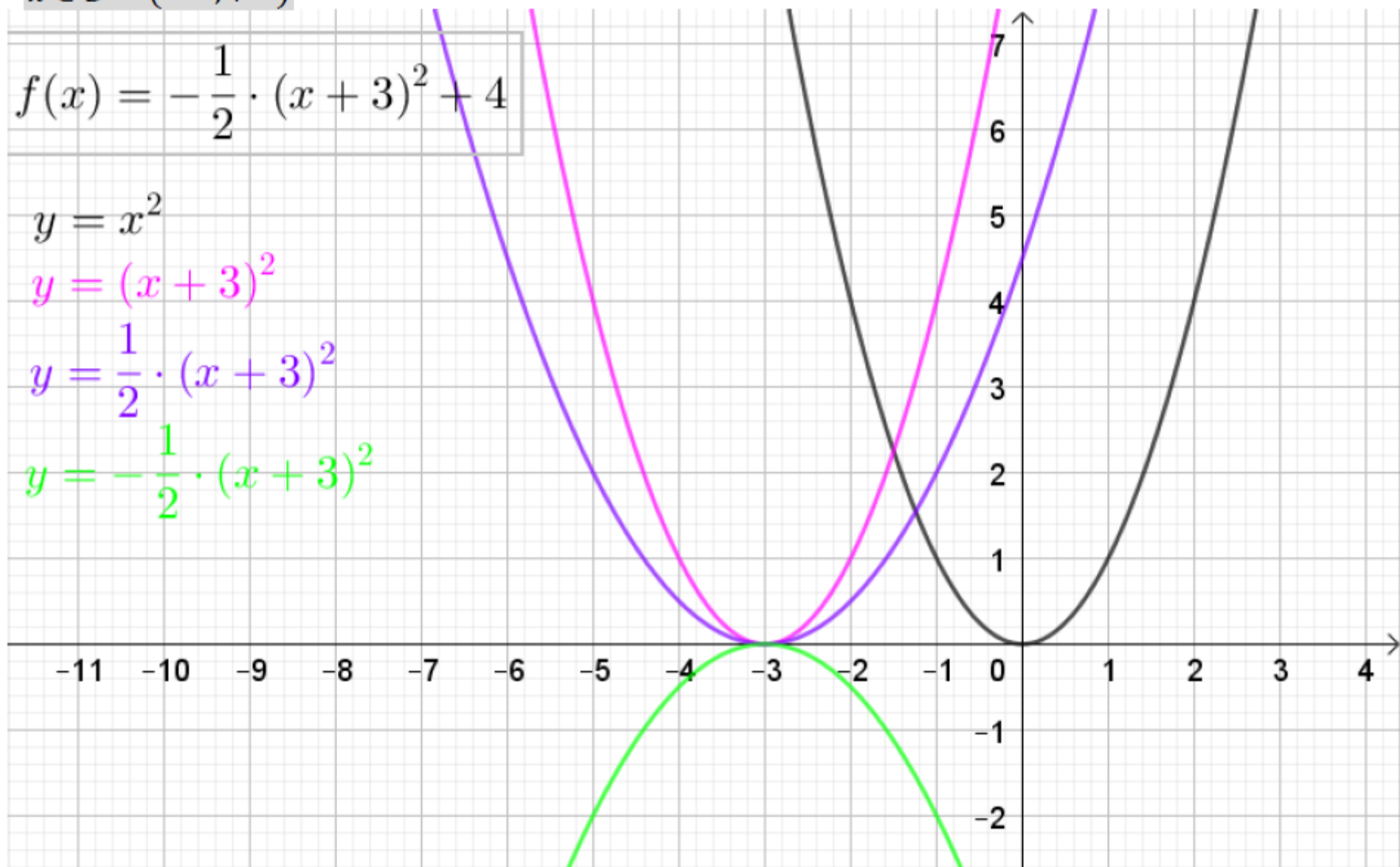
$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 4$$

$$y = x^2$$

$$y = (x+3)^2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x+3)^2$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2$$



$$x \in D = (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 4$$

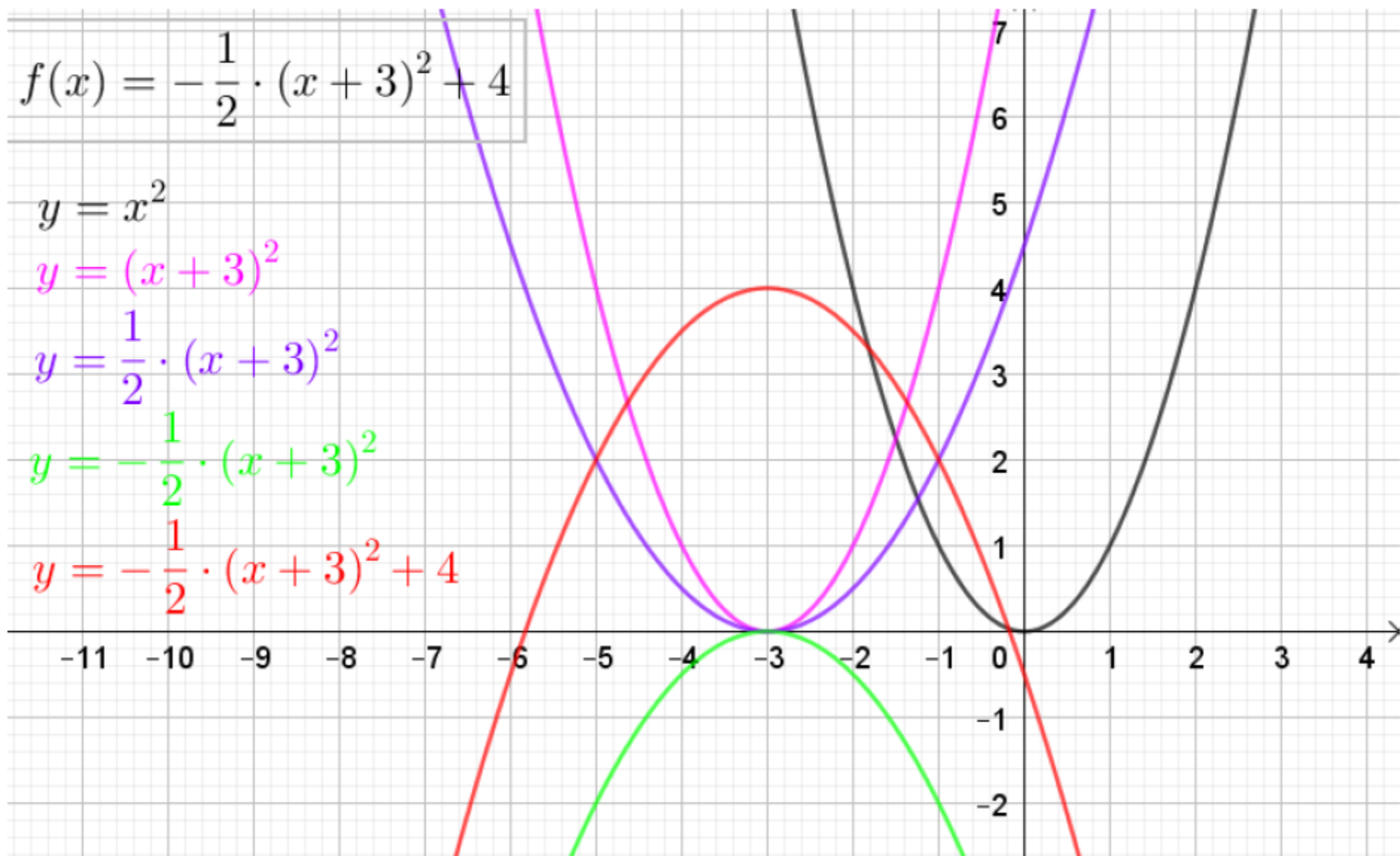
$$y = x^2$$

$$y = (x+3)^2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x+3)^2$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 4$$



□ Másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek

➤ Másodfokú polinom

➤ Másodfokú egyenlet

➤ Diszkrimináns

➤ Megoldóképlet

➤ Gyöktényezős alak

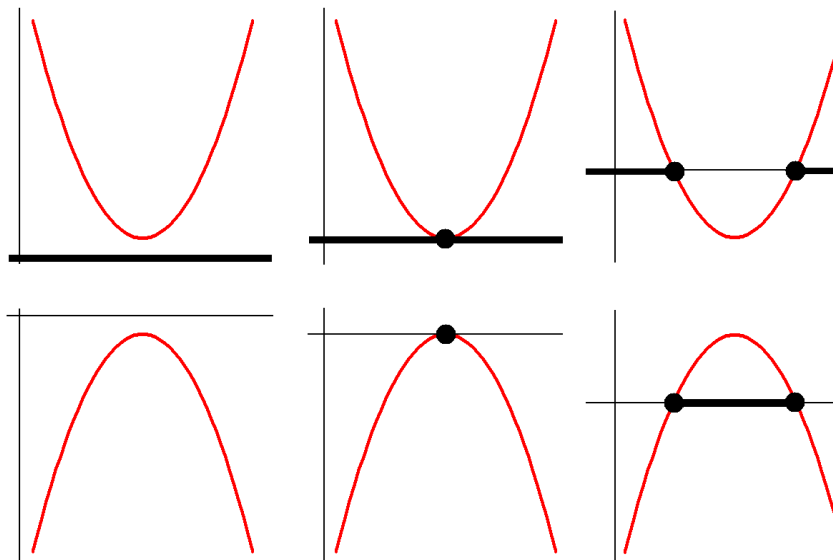
➤ Másodfokú egyenlőtlenségek ($a \neq 0$)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$$



$a > 0$

$a < 0$

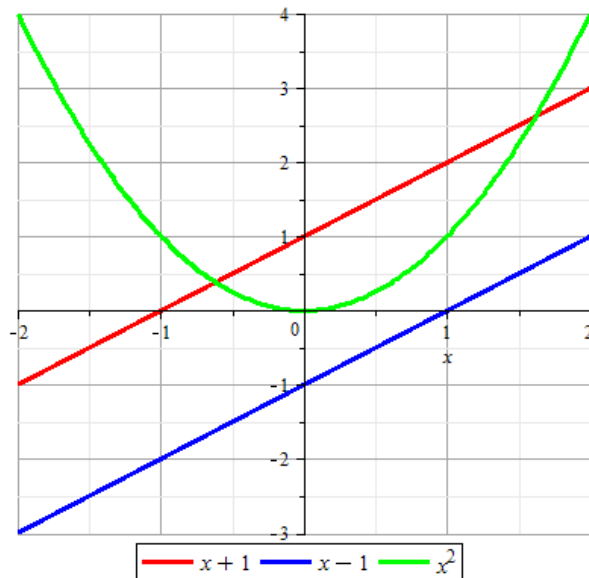
4. feladat: Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza



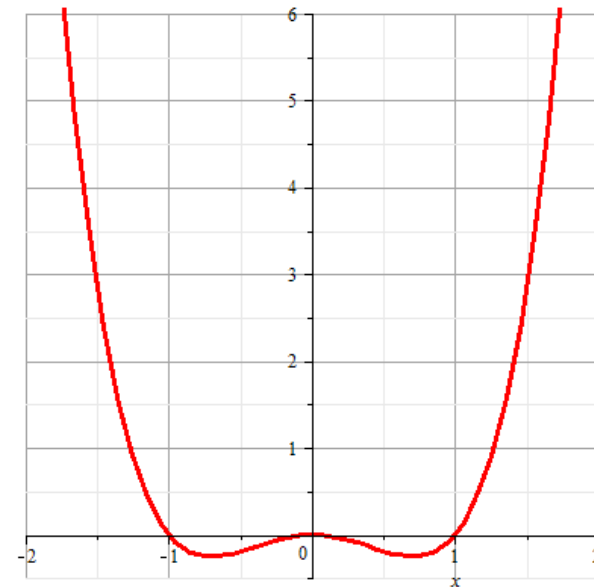
		A	B	C	D
1.cs.	$x^2 - x - 6 \leq 0$	$[-3;-2]$	$[-3;2]$	$[-2;3]$	$[2;3]$
2.cs.	$x^2 + 2x - 3 \geq 0$	$x \leq -1$ vagy $x \geq 3$	$x \leq 1$ vagy $x \geq 3$	$x \leq -3$ vagy $x \geq -1$	$x \leq -3$ vagy $x \geq 1$
3.cs.	$x^2 - x - 6 > 0$	$x < -3$ vagy $x > -2$	$x < -2$ vagy $x > 3$	$x < -3$ vagy $x > 2$	$x < 2$ vagy $x > 3$

$$P(x) = x^4 - x^2$$

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$x^4 - x^2$	+	0	-	0	-	0	+



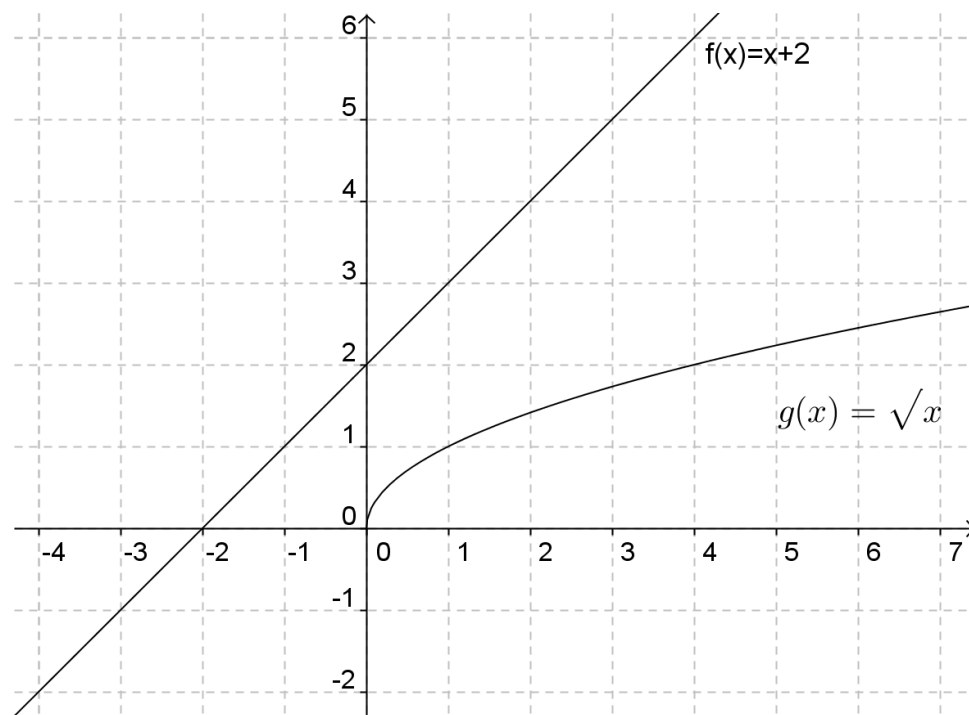
$$x^2(x^2 - 1) = 0$$



Példa: Oldja meg a $3^{\sqrt{x}} = 3^{x+2}$ egyenletet a valós számok halmazán!

$$3^{\sqrt{x}} = 3^{x+2} \Rightarrow \sqrt{x} = x+2 \Rightarrow x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + 3x + 4 &= 0 \Rightarrow \\ x_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\text{nincs valós megoldás} \end{aligned}$$



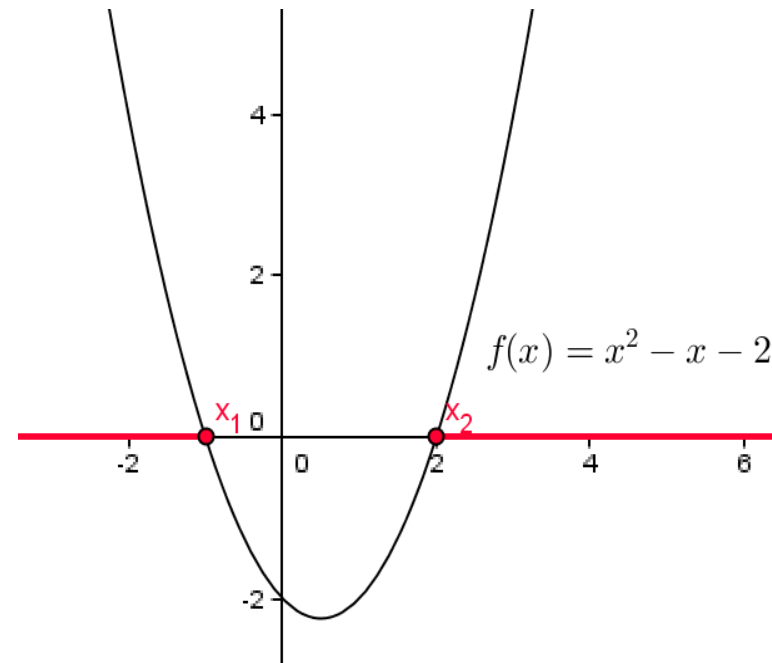
Példa: Oldja meg a $2^{x^2} \geq 2^{x+2}$ egyenlőtlenséget!

$$2^{x^2} \geq 2^{x+2} \Rightarrow x^2 \geq x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

megoldás:

$$x \leq -1 \text{ vagy } x \geq 2$$



Példa: Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\log_{0.5} x + 3 \geq 0$$

Feltétel: $x > 0$

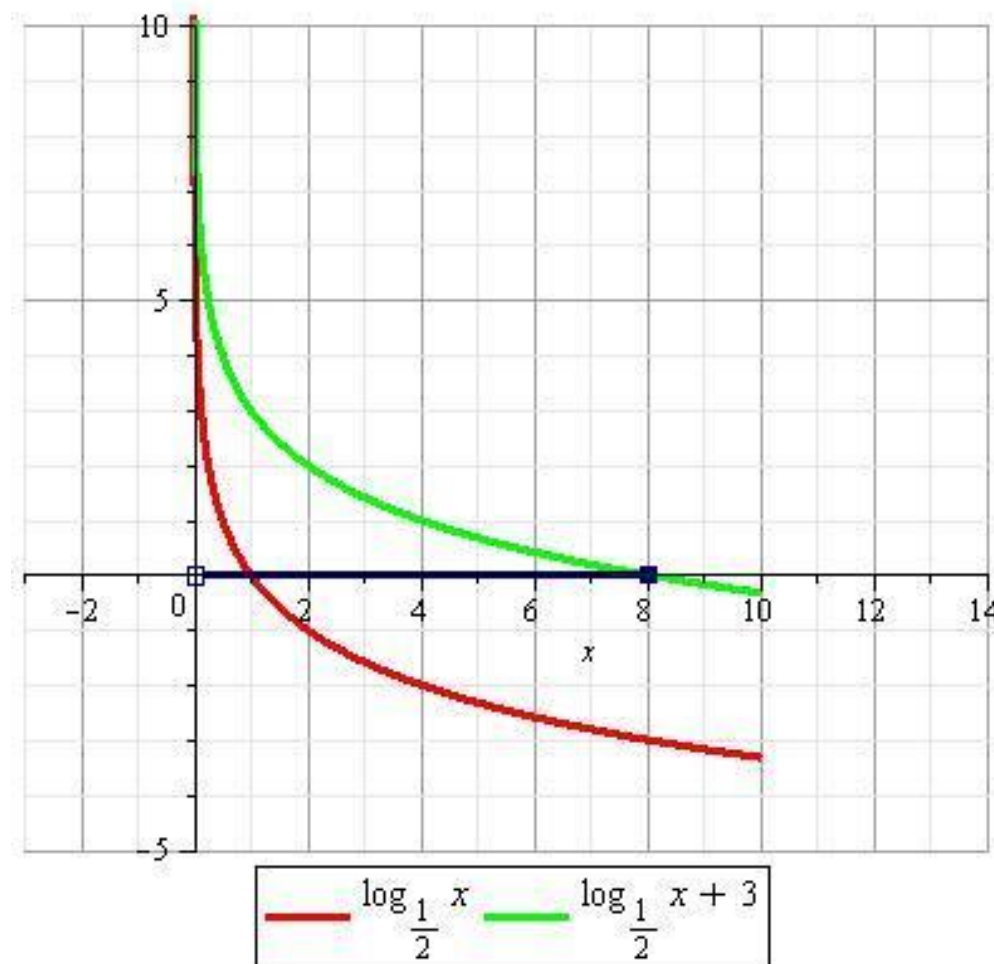
$$\log_{0.5} x \geq -3$$

$$\log_{0.5} x \geq \log_{0.5} 0.5^{-3}$$

$$\log_{0.5} x \geq \log_{0.5} 8$$

$$x \leq 8$$

Megoldás: $0 < x \leq 8$

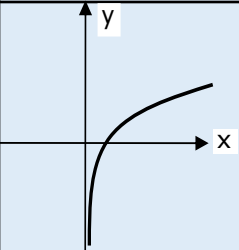
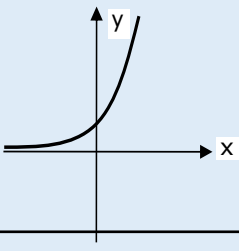
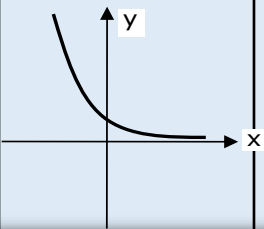


!!! $\log_{0.5} x + 3 \geq 0$ nem ugyanaz, mint $\log_{0.5}(x+3) \geq 0$

Melyik függvény grafikonja lehet?

$f(x)=\dots$



		A	B	C	D
1.cs.		$\sqrt[3]{x-1}$	$\sqrt[3]{3} \cdot x$	$3 \cdot \log_3 x$	$\log_3(x+1)$
2.cs.		$x^3 + 1$	3^{x+1}	$(x+1)^3$	$x^{\frac{1}{3}} + 1$
3.cs.		x^{-3}	$x^{-\frac{1}{3}}$	3^{x-1}	3^{1-x}