Hajdú-Bihar megyei középiskolások matematika versenye 2016/2017
– 12. évfolyam, megoldókulcs –

---

1. feladat

Átalakítjuk az $a_{n+1} = \frac{4-a_n}{3}$ ($n \in N^+$) összefüggést. $a_{n+1} - 1 = -\frac{a_n - 1}{3} = -\frac{1}{3}(a_n - 1)$.

1 pont

Vezessük be az $y_n = a_n - 1$ jelölést. Így $a_n = 1 + y_n$ és

1 pont

$y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$, vagyis $\{y_n\}$ mértani sorozat, ahol $y_1 = 2 - 1$ és hányadosa $q = -\frac{1}{3}$.

4 pont

$$a_{2016} = 1 + y_{2016} = 1 + 1\left(-\frac{1}{3}\right)^{2015} = 1 - \frac{1}{3^{2015}}$$

4 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat

Felhasználjuk, hogy bármely 1-nél nem nagyobb abszolút értékű valós z és bármely $n \geq 2$ ($n \in N^+$) esetén teljesül, hogy $z^n \leq n^2$.

2 pont

Mivel $|\sin x| \leq 1$ és $|\cos x| \leq 1$, ezért
$\sin^{2015}x \leq \sin^2 x$, $\cos^{2016}x \leq \cos^2 x$, illetve $\sin^{2017}x \leq 1$.

3 pont

$\sin^{2015}x + \cos^{2016}x + \sin^{2017}x \leq \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^{2017}x \leq 1 + 1 = 2.$

3 pont

Egyenlőség akkor teljesül, ha $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

2 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat

Mivel $AB = 10$ és $ABC\measuredangle = 60°$, így $BC = 5$ és $AC = 5\sqrt{3}$.

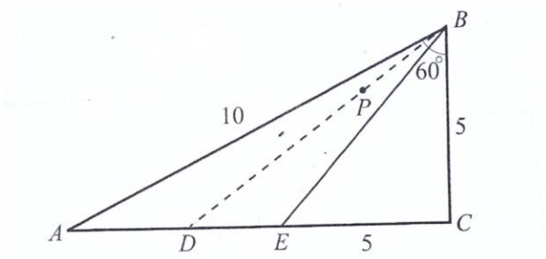
1 pont

A keresett q valószínűséget a komplementer esemény p valószínűségének a segítségével fogjuk kiszámolni, a $q = 1 - p$ összefüggés felhasználásával.

1 pont

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor E illeszkedik AC-re és $BE = 5\sqrt{2}$.

Ez akkor következik be, ha $CE = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 5^2} = 5$, vagyis az ECB háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.



2 pont

Így $BD < 5\sqrt{2}$, ha a D pont az E és C között van, vagyis ha a pont a BEC háromszög belsejében helyezkedik el.

2 pont

Annak p valószínűsége, hogy $BD \leq 5\sqrt{2}$ legyen: $p = \dfrac{T_{BEC}}{T_{BAC}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 25}{\frac{1}{2}\cdot 25\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4 pont

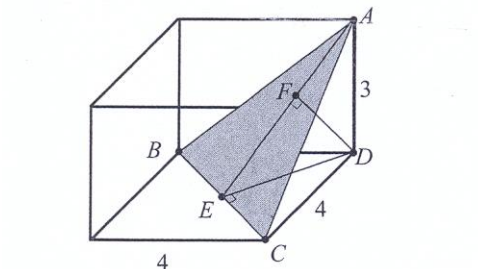
Tehát annak valószínűsége, hogy $BD > 5\sqrt{2}$ legyen $q = 1 - p = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2 pont

Összesen: 12 pont

4. feladat

Ábrát készítünk és felhasználjuk az ábra jelöléseit: $AD = 3$, $CD = BD = 4$.



Jelöljük E-vel a BC átló felezőpontját, $CE = \dfrac{1}{2}BC = 2\sqrt{2}$.

1 pont

Mivel a négyzet átlói felezik egymást $DE = CE = 2\sqrt{2}$.

1 pont

Pitagorász tétele szerint az AED derékszögű háromszögből

$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{9+8} = \sqrt{17}$.

2 pont

Az AE-n úgy határozzuk meg az F pontot, hogy DF az ADE derékszögű háromszög magassága legyen. Ekkor $DF \perp AE$, ezért merőleges az ABC síkjára is, így DF az ABC alapú, $ABCD$ derékszögű tetraéder magassága, melynek térfogata

$$V = \frac{1}{3}DF\cdot T_{ABC} = \frac{1}{3}DF\cdot\left(\frac{1}{2}BC\cdot EA\right) = \frac{1}{6}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}DF = \frac{2\sqrt{34}}{3}DF.$$

4 pont

Az $ABCD$ derékszögű tetraéder térfogatát úgy is kiszámolhatjuk, hogy BCD-t vesszük alapnak, ekkor AD a magassága: $V = \dfrac{1}{3}\cdot 3\cdot T_{BCD} = \dfrac{1}{2}\left(4^2\right) = 8$.

3 pont

A kétféleképpen kiszámolt térfogatérték összehasonlításából megkapjuk, hogy

$DF = \dfrac{6\sqrt{34}}{17} (\approx 2{,}06)$.

2 pont

Összesen: 13 pont

5. feladat

$f_a(x) = \left| a + \cos 2x + \dfrac{1}{2+\cos^2 x} \right| = \left| a - 5 + 2\cos^2 x + 4 + \dfrac{1}{2+\cos^2 x} \right|$, ahol felhasználtuk, hogy $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

1 pont

Vezessük be a $t = 2 + \cos^2 x$ jelölést. Ekkor $f_a(x) = \left| 2t + \dfrac{1}{t} + a - 5 \right|$. Nyilvánvaló, hogy $2 \le t \le 3$.

2 pont

A $g(t) = 2t + \dfrac{1}{t}$ függvény szigorúan monoton növekvő a $[2;\ 3]$ intervallumon, mert

$2 \le t_1 < t_2 \le 3$ esetén $2t_2 + 2t_2 + \dfrac{1}{t_2} - 2t_1 - \dfrac{1}{t_1} = (t_2 - t_1) \cdot \left(2 - \dfrac{1}{t_1 t_2} \right) > 0$.

3 pont

Így $2t + \frac{1}{t} \in \left[2 \cdot 2 + \frac{1}{2}\ ;\ 2 \cdot 3 + \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{9}{2}\ ;\ \frac{19}{3} \right]$.

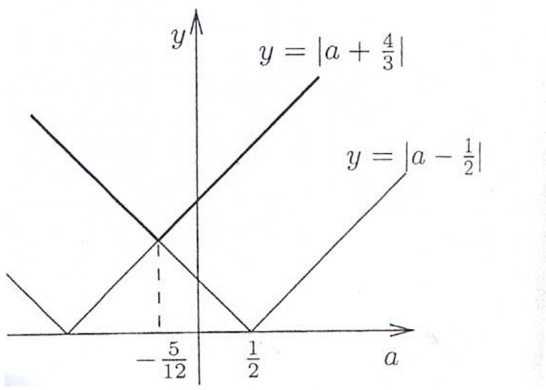
2 pont

Tehát $2t + \frac{1}{t} + a - 5 \in \left[a - \frac{1}{2}\ ;\ a + \frac{4}{3} \right]$.

2 pont

$M(a) = \max\left\{ \left| a - \dfrac{1}{2} \right|, \left| a + \dfrac{4}{3} \right| \right\}$.

2 pont



Az ábra grafikonjainak a felhasználásával meghatározható a keresett minimum érték:

$\min\{M(a)\ (a \in \mathbb{R})\} = \frac{11}{12}$, amit $a = -\dfrac{5}{12}$ esetén kapunk meg.

3 pont

Összesen: 15 pont