Hajdú–Bihar megyei középiskolások matematika versenye, 2016/2017
– 10. évfolyam, megoldókulcs –

---

1. feladat

$||x-1|-3| = 4$ pontosan akkor teljesül, ha vagy $|x-1|-3=4$, vagy $|x-1|-3=-4$.

4 pont

Az első esetben $|x-1|=7$, aminek megoldása $x=8$ és $x=-6$.

2 pont

A második esetben $|x-1|=-1$, ami valós x-re nem teljesül.

2 pont

Ekvivalens átalakítások miatt a keresett megoldás: $x_1=8$ és $x_2=-6$.

2 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat

A keresett számot megkapjuk, ha az összes négyelemű részhalmazok számából kivonjuk az olyan négyelemű részhalmazok számát, amelyek nem tartalmazzák sem 1-et, sem 2-t.

3 pont

Az összes négy elemű részhalmazok száma: $\binom{20}{4}$.

3 pont

Az olyan négy elemű részhalmazok száma, amelyek nem tartalmazzák sem 1-et, sem 2-t: $\binom{18}{4}$.

3 pont

Tehát a keresett szám $\binom{20}{4} - \binom{18}{4} = 1785$.

1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat

Ha lenne ilyen négyzetszám, akkor az utolsó számjegye is páratlan lenne, tehát páratlan szám négyzete lenne,

2 pont

így alakja $(10a+b)^2$, ahol b egyjegyű páratlan szám, a pedig természetes szám,

2 pont

és $b=1$ vagy $b=3$ esetén a pozitív is, mert a négyzetszám többjegyű.

2 pont

$b=1$ és $b=3$ esetén $(10a+b)^2 = 100a^2+20ab+b^2$ utolsó előtti számjegye $2ab$ utolsó számjegye, ami páros,

3 pont

$b=5$, vagy $b=7$, vagy $b=9$ esetén $(10a+b)^2 = 100a^2+20ab+b^2$ utolsó előtti számjegye a $2ab+2$, vagy a $2ab+4$, vagy a $2ab+8$ utolsó számjegye, tehát mindenképpen páros.

3 pont

Összesen: 12 pont

4. feladat

Az ABC szabályos háromszög P belső pontjának az A, B, C csúcsoktól való távolsága legyen rendre $x,\ y,\ z$, az $AB,\ BC,\ CA$ oldalaktól való távolsága rendre $u,\ v,\ w$. P-n át húzzunk párhuzamosat a BC egyenessel, ez az AB oldalt B'-ben, az AC oldalt C'-ben metszi.

1 pont

Az $AB'C'\triangle$ nyilván szabályos, oldalhossza a', magassága m', területe:
$t_{AB'C'} = t_{AB'P} + t_{PC'A} = \frac{1}{2}(a'u + a'w) = \frac{1}{2}a'm' \leq \frac{1}{2}a'x$, mert $m' \leq x$.

6 pont

Ebből következik, hogy $u + w \leq x$.

3 pont

Hasonlóan kapjuk, hogy $u + v \leq y$ és $v + w \leq z$.

2 pont

A három egyenlőtlenség összeadásával azt kapjuk, amit igazolni kellett:
$2(u + v + w) \leq x + y + z$.

2 pont
Összesen: 14 pont

5. feladat

Legyen a C pontot tartalmazó belső érintő két érintési pontja P ill. Q, éspedig C, P, Q sorrendben; a D pontot tartalmazó belső érintő két érintési pontja R ill. S, éspedig D, R, S sorrendben.
Körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt
$\overline{DC} + \overline{CA} = \overline{DR} + \overline{RS}$ és $\overline{CP} + \overline{PQ} = \overline{CD} + \overline{DB}$.

6 pont

Ezeket összeadva: $\overline{DC} + \overline{CA} + \overline{CP} + \overline{PQ} = \overline{DR} + \overline{RS} + \overline{CD} + \overline{DB}$.

3 pont

A körök centrálisára szimmetrikusak az érintők, így $\overline{PQ} = \overline{RS}$.

2 pont

Nyilván igaz, hogy $\overline{CA} = \overline{CP}, \overline{DB} = \overline{DR}$.

2 pont

Ezeket és $\overline{DC} = \overline{CD}$, felhasználva, és az egyszerűsítéseket elvégezve,
kapjuk a bizonyítandó $\overline{AC} = \overline{DB}$ egyenlőséget.

1 pont
Összesen: 14 pont