Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

H-4010 Debrecen, Pf. 12 +3652512900 office.math@science.unideb.hu

Megyei Matematika Szakkör

— Feladatsorok —

A foglakozások hétfő délutánonként 16.30-tól kezdődnek
a Matematikai Intézet M402-es tantermében.

Debrecen, 2016

— A foglakozások témái és a témák vezetői —

Név:	**Intézmény:**	**Téma:**
Balogh Tamás	DE Közgazdaságtudományi Intézet	*Gráfelmélet*
Boros Zoltán	DE Matematikai Intézet	*Választási rendszerek axiomatikája*
Deli Lajos	Hőgyes Endre Gimnázium	*Nehéz problémákról egyszerűen*
Márkus Imre	DE Kossuth Gyakorló Gimnázium	*Sorozatok*
Orvos Viola	Fazekas Mihály Gimnázium	*Algebrai egyenletek*
Paulovits György	Bethlen Gábor Szakközépiskola	*Hatványközepek*

1. Feladat. *Oldja meg a következő egyenletet:* $x^3 - 3x^2 - 3x - 14 = 0$.

2. Feladat. *Vezesse le általánosan a Cardano képletet!*

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

3. Feladat. *Oldja meg a Cardano képlet segítségével a következő egyenleteket!*

(i) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$
(ii) $x^3 + 3x^2 - 6x - 36 = 0$ *(Házi Feladat)*
(iii) $x^3 - 3x^2 - 57x - 130 = 0$
(iv) $x^3 - 9x^2 - 135x - 486 = 0$ *(Házi Feladat)*

4. Feladat. *Vizsgálja meg az* $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ *gyöktényezős alakban megadott egyenlet megoldását Cardano képlettel!*

5. Feladat. *Oldja meg az alábbi egyenleteket!*

(i) $x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = 0$
(ii) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$
(iii) $x^3 + 3x^2 - 15x - 125 = 0$

6. Feladat. *Igazolja Rolle tételét: Ha az* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ *egész együtthatós algebrai egyenletnek* r/s *gyöke (ahol* r *és* s *relatív prímek), akkor* r *osztója* a_0*-nak és* s *osztója* a_n*-nek.*

7. Feladat. *Keresse meg a következő egyenletek racionális gyökeit!*

(i) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$
(ii) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24 = 0$
(iii) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36 = 0$
(iv) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60 = 0$

8. Feladat. *Oldja meg az alábbi reciprok egyenleteket!*

(i) $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$
(ii) $20x^4 + 8x^3 - 105x^2 + 8x + 20 = 0$
(iii) $6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0$
(iv) $2x^3 + 7x^2 - 7x - 2 = 0$
(v) $12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0$
(vi) $30x^4 - 17x^3 - 228x^2 + 17x + 30 = 0$
(vii) $x^7 - 4x^6 + 8x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0$
(viii) $x^9 + 2x^8 + 3x^7 + 4x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0$

9. Feladat. *Oldja meg az* $x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 27 = 0$ *egyenletet!*

10. Feladat. *Az e egyenes az S síkot két félsíkra bontja. Az A és B pontok az egyik félsíkban vannak. Határozza meg az e egyenesnek azt a P pontját,amelyre az $AP + PB$ töröttvonal hossz minimális!*

11. Feladat. *Egy hegyesszögű szögtartomány két pontja A és B. Határozza meg az egyik szögszár P és a másik szögszár Q pontjait úgy, hogy az $AP + PQ + QB$ töröttvonal hossz minimális legyen! (Házi feladat)*

12. Feladat. *Egy d szélességű folyó egyik partján, a parttól x távolságra van V város, a másik partján a parttól y távolságra W város. Szeretnének a folyóra egy hidat építeni úgy, hogy ha az egyik városból egyenes úton a híd lábához megyünk, átkelünk a hídon, majd egyenes úton a másik városba megyünk, ezt a lehető legrövidebb úton tehessük. Hová kell építeni a hidat?*

13. Feladat. *Adott egy kúp palástján a P pont. Szeretnénk a kúp palástján azt a legrövidebb sétát megtenni, amely P pontból indul, a kúp minden alkotójával van közös pontja, és a P pontban fejeződik be. Melyik útvonalat kell választanunk?*

14. Feladat. *Egy henger alakú pohár belső falán van egy mézcsepp, a külső falán pedig egy méh. Hogyan juthat el a méh a pohár falán mászva a legrövidebb úton a mézcsepphez? (Házi feladat)*

15. Feladat. *Legyen a P pont az $ABCD$ téglalap AB oldalának egy belső pontja! Határozzuk meg a BC oldalon a Q, CD oldalon az R, és DA oldalon az S pontokat úgy, hogy a $PQRS$ négyszög kerülete minimális legyen!*

16. Feladat. *Egy egység élű kocka egyik élén kijelöltünk egy a kocka csúcsaitól különböző pontot. Milyen hosszú az a legrövidebb út, amely a P pontból indul, áthalad a kocka minden lapján, és a P pontba érkezik vissza?*

17. Feladat. *Egy téglalap alakú üveglap egyik oldala* 90 *cm, másik oldala* 70 *cm. Az egyik sarkánál letört egy derékszögű háromszög alakú darab, melynek* 12 *cm hosszú befogója a* 70 *cm-es oldalra esik,* 18 *cm hosszú befogója a* 90 *cm-es oldalra. A megmaradó darabból a lehető legnagyobb területű, téglalap alakú üveglapot akarjuk kivágni. Mekkorák lesznek az oldalai, mekkora lesz a területe?*

18. Feladat. *Határozza meg az* $f(x)=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$ *valós függvény szélsőértékeit!*

19. Feladat. *Határozza meg az* $f(x)=\sqrt{7+x^2}+\sqrt{x^2-6x+11}$ *valós függvény minimumát!*

20. Feladat. *Határozza meg az* $f(x)=(3-2x)^3(3x+1)^2$*valós függvény maximumát a* $-1/3<x<3/2$ *feltétel esetén.*

21. Feladat. *Melyek azok a* $P(x;y)$ *pontok, melyekre a* $K=x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2}$ *kifejezés értéke minimális?*

22. Feladat. *Határozza meg az* $a^2+b^2+c^2$ *kifejezés minimumát, ha* a,b,c *pozitív valós számok, melyek összege* 1.

23. Feladat. *Egy számsorozat* n*-edik tagja* $a_n=\frac{23^{2017+2n}}{n!}$. *Melyik a sorozat legnagyobb tagja?*

24. Feladat. *Mennyi az* $f(x)=2016\sin x+2017\cos x$ *valós függvény maximuma?*

25. Feladat. *Határozza meg a* 2016 *kerületű háromszögek közül a maximális területű háromszög területét!*

26. Feladat. *Határozza meg a* 2017 *területű háromszögek közül a minimális kerületű háromszög kerületét! (Házi feladat)*

27. Feladat. *Egy* L *hosszúságú szakaszt* n *részre osztunk. Határozza meg a részek szorzatának maximumát!*

28. Feladat. *Adja meg a* $2x+3y$ *kifejezés maximumát, ha* $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+2y\leq 10$, $x+y\leq 6$, $x-4\leq 0$.

29. Feladat. *Legyen az x és y pozitív valós számok szorzata 50, továbbá $x > y$! Határozza meg az $(x^2 + y^2)/(x - y)$ kifejezés minimumának értékét! Adja meg az x/y aránynak azt az értékét, amelyre a kifejezés a minimumát felveszi!*

30. Feladat. *A hegyesszögű háromszög AB oldalának mely P belső pontjára lesz a $PB^2 + PC^2$ összeg minimális?*

31. Feladat. *Az $ABCD$ négyzet oldalai 10 cm hosszúak. Legyen az AB oldal felezőpontja E, a BC felezőpontja F, az EF szakaszé pedig M. Az AD szakaszon felvesszük az N, a CD-n pedig a P pontot úgy, hogy $DN = DP$ teljesüljön. Határozza meg az N és a P pontok helyét úgy, hogy az MNP háromszög területe maximális legyen!*

32. Feladat. *Legyen $x, y > 0$! Határozza meg a következő kifejezés minimumát:*

$$\frac{x^{16}}{y^{16}} + \frac{y^{16}}{x^{16}} - \frac{x^8}{y^8} - \frac{y^8}{x^8} + \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Állapítsa meg, milyen x, y értékeknél veszi fel ezt a minimumot!

33. Feladat. *Igazolja, hogy ha egy háromszög területe $1/2$ területegység, akkor a kerületére $K > 3$ teljesül!*

34. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy ha $x, y, z > 1$, akkor*

$$\log_{xy} \sqrt{xyz^2} \cdot \log_{xz} \sqrt{xzy^2} \cdot \log_{yz} \sqrt{yzx^2} \geq 1$$

teljesül! Mikor áll fenn egyenlőség?

35. Feladat. *Egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú lemezből ugyanilyen alapú dobozt készítünk azonos magasságú oldallapokkal, a vonalkázott részek kivágásával. Milyen magasság mellett lesz a doboz térfogata maximális?*

36. Feladat. *Legyen $a + b + c = 12$, $a, b, c \geq 0$! Határozza meg a $K = ab^2c^3$ kifejezés maximumát! Milyen a, b, c értékek mellett veszi fel K ezt a maximumot?*

37. Feladat. *Legyen $x, y \in [0, 12]$, továbbá $xy = (12 - x)^2(12 - y)^2$! Határozza meg a $K(x, y) = xy$ kifejezés maximumát!*

38. Feladat. *Legyenek a háromszög oldalai a, b, c, területe pedig t! Bizonyítsa be, hogy fennáll az $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4t\sqrt{3}$ egyenlőtlenség! Milyen esetben áll fenn egyenlőség?*

39. Feladat. *Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalán vegyük fel rendre a tetszés szerinti, de a csúcsoktól különböző M, K, L pontokat! Bizonyítsuk be, hogy az MAL, KBM, LCK háromszögek közül legalább az egyiknek a területe nem nagyobb az ABC háromszög területének a negyedénél!*

40. Feladat. *Melyik hegyesszögű háromszögben lesz minimális a* $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ *szorzat értéke (hacsak α, β, γ a háromszög szögei)?*

41. Feladat. *Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\sin^2 x}+\sqrt{\frac{5}{4}-\sin^2 y}+\sqrt{1+\tan^2 z}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 y+\tan^2 z}{2}+\frac{19}{8}.$$

42. Feladat. *Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\frac{2\cos 2x+2\sin^2 x}{2\cos^4 x-2\cos^2 x+3\sin^2 x}+\frac{13\cos^2 x}{2\cos^4 x+4\cos^2 x+3\sin^2 x}=6.$$

43. Feladat. *Oldja meg a $[0, 2\pi]$ halmazon a következő egyenlőtlenséget:*

$$\frac{\sqrt{3}+\cos x}{2\sin^3 x-\cos x\sin 2x}>\frac{3}{2\sin 4x}.$$

44. Feladat. *Oldja meg a* $\cos^n x-\sin^n x=1$ *egyenletet, ahol n tetszőleges pozitív egész szám!*

45. Feladat. *Jelölje valamely háromszögben az oldalakat rendre a, b, c; a velük szemközti szögeket pedig α, β, γ. Bizonyítsa be, hogy ha*

$$a+b=\tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha+b\tan\beta),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú!

46. Feladat. *Legyen az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának hossza a, az AD oldalé egységnyi, DAB szögének mérőszáma α, továbbá legyen az ABD háromszög hegyesszögű! Bizonyítsa be, hogy az egységnyi sugarú K_A, K_B, K_C, K_D körlemezek, amelyeknek a középpontja az A, B, C és D csúcs, akkor és csakis akkor fedik le együtt a paralelogrammát, ha*

$$a\leq\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

47. Feladat. *Az a_1 és a_2 valós számokból kiindulva képezzük az (a_n) sorozatot úgy, hogy $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Számítsa ki a sorozat első 2016 tagjának összegét!*

48. Feladat. *Számítsa ki az $S_{2016} = a_1 + \cdots a_{2016}$ összeget, ha*

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2}!$$

49. Feladat. *Számítsa ki az alábbi összeget!*

$$\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{2015 \cdot 2016 \cdot 2017}$$

50. Feladat. *Mutassa meg, hogy az $1^3 + 2^3 + \cdots + 2016^3$ összeg osztható 2017-tel!*

51. Feladat. *Képezzük a köbszámok sorozatának szomszédos tagjaiból képzett „elsőrendű" különbségeket. Ezen sorozat első néhány tagja: $7, 19, 37, 61, \ldots$ A sorozat első négy tagja prímszám. Igaz-e, hogy a sorozat minden tagja prímszám?*

52. Feladat. *Legyen x_1 pozitív, 1-nél kisebb szám. Ebből kiindulva képezzük az $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ előírással meghatározott sorozatot. Mutassa meg, hogy ha n bármekkora, $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1$.*

53. Feladat. *Hányféleképpen lehet 12 forintot 1 és 2 forintosokkal kifizetni, ha az érmék sorrendjét is figyelembe vesszük?*

54. Feladat. *Hányféleképpen lehet egy 12 szintes lépcső tetejére felmenni, ha egyszerre egy vagy két lépcsőt léphetünk és az 5. fokra – biztonsági okokból – nem léphetünk?*

55. Feladat. *Határozza meg a Fibonacci sorozat első n tagjának összegét!*

56. Feladat. *Adott az* $1, 18, 35, \ldots$ *számtani sorozat. Határozza meg a sorozatnak azokat a tagjait, amelyek csupa hármas számjegyből állnak!*

57. Feladat. *Két számtani sorozat azonos indexű tagjait összeszoroztuk. Így kaptuk meg a* $1440, 1716, 1848, \ldots$ *sorozatot. Határozza meg ennek a sorozatnak a nyolcadik tagját!*

58. Feladat. *Egy növekvő számtani sorozat tagjai egész számok, és egyik tagja négyzetszám. Bizonyítsa be, hogy akkor bármeddig folytatva a sorozatot, tagjai közt újra és újra fordulnak elő négyzetszámok!*

59. Feladat. *Legyenek* (a_n)*,* (b_n) *és* (c_n) *pozitív egészekből álló, nem állandó számtani sorozatok. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az*

$$a_{b_n} + b_{c_n} - c_{a_n}$$

kifejezés n*-től független legyen? Adjon egy konkrét példát ilyen sorozatokra!*

60. Feladat. *Az* (a_n) *sorozat teljesíti az* $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$ *rekurziót. Határozza meg* a_{2016} *értékét, ha* $a_0 = 1$ *és* $a_1 = 2$*!*

61. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy egy pozitív egészekből álló mértani sorozat egyetlen tagja sem állítható elő a sorozat más tagjainak összegeként!*

62. Feladat. *Egy tábla csokoládé csomagolásában egy kártya található. Tíz darab kártya beváltható egy újabb tábla csokoládéra. Mennyit „ér” valójában egy tábla csokoládé?*

63. Feladat. *Határozzuk meg azoknak az egymással nem egyenlő véges tizedes törteknek az összegét, melyek reciproka pozitív egész szám!*

64. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy egy körmérkőzéses bajnokságban páros azoknak a csapatoknak a száma, amelyek a bajnokság egy pillanatában páratlan számú mérkőzést fejeztek be!*

65. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy minden konvex poliédernek van két azonos oldalszámú lapja!*

66. Feladat. *Gráffy úr és felesége estélyt rendez otthonában, melyre meghív négy házaspárt. A házaspárok egymás után meg is érkeznek, és akik már régebbről barátságban vannak, öleléssel üdvözlik egymást. Gráffy úr figyeli a társaságot, és amikor már mind együtt vannak, csendesen megjegyzi: „érdekes, a többiek között nincs két olyan, akit ugyanannyiszor öleltek volna meg". Hányszor ölelték meg Gráffynét? Mi lenne az eredmény, ha tetszőleges n házaspárt hívtak volna meg? (Reiman I.: Geometria és határterületei 336. o.)*

67. Feladat. *A matematikus-manó házaspár lányának nincs három olyan barátnője, akik közül bármelyik kettő ismeri egymást, se három olyan barátnője, akik közül semelyik kettő sem ismeri egymást, de ha eggyel több barátnője lenne, akkor már biztosan lenne vagy három ilyen, vagy három olyan. Hány barátnője van a manólánynak? (Medve matekverseny, Debrecen, 2010.)*

68. Feladat. *Egy húsztagú társaságban mindenki elmondhatja magáról, hogy „az ismerőseim rajtam kívüli ismerősei közül nekem senki sem ismerősöm". Hány bemutatkozás történhet ezek után a társaságban? (Ismerősök nyilván nem mutatkoznak be egymásnak.) Adjon alsó és felső korlátot is!*

69. Feladat. *Egy országban a fővárosból 100, az összes többi városból 10-10 vasútvonal indul (az egy városból induló vonalak célállomásai mind különbözőek, és a vonalakon mindkét irányban lehet közlekedni). Azt is tudjuk továbbá, hogy bármely városból bármely másik elérhető. Legalább hány fővárosból induló vasútvonalat lehet biztosan megszüntetni, hogy továbbra is bármely városból bármely másikba el lehessen jutni? (Medve matekverseny, Debrecen, 2011.)*

70. Feladat. *Medveországban bármelyik városból bármelyik városba el lehet jutni repülőn legfeljebb egy átszállással, de minden városból legfeljebb 3 másik városba van repülőjárat. Legfeljebb hány város lehet Medveországban? (Medve matekverseny, Budapest, 2009.)*

71. Feladat. *Egy iskolába 2008 diák jár. Minden diáknak van egy egyedi egész sorszáma 1 és 2008 között. Az iskola érdekessége, hogy két diák pontosan akkor barátja egymásnak, ha egyikük sorszáma osztója a másikuk sorszámának. Hány fős ebben az iskolában a legnagyobb klikk, azaz a legnagyobb olyan diáktársaság, ahol mindenki mindenkinek a barátja?*

72. Feladat. *Egy nemzetközi konferencián az n résztvevő meg tudja érteni egymást, esetleg közülük felkért tolmácsok segítségével. Mutassa meg, hogy ekkor legalább $n-1$ különböző pár résztvevő tolmács nélkül is tud beszélgetni!*

73. Feladat. *Egy térségben n falu található, melyeket gázvezetékekkel kötöttek össze. Bármely két falu közt húzodik vezeték, de a vezetékeken értelemszerűen csak egy irányba tud áramlani a gáz. Van-e minden esetben olyan falu, amelyből a gázt indítva a térségben található összes falu biztosan ellátható gázzal?*

74. Feladat. *Adott n város úgy, hogy közülük bármely kettőt egyirányú vasútvonal köt össze. Bizonyítsa be, hogy a városok közt van olyan, ahonnan bármelyik városba legfeljebb egy átszállással (ezen a vasúthálózaton) el lehet jutni! (Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2013., 12. évf.)*